ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2016 года

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЦЕНИВАНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ЕГЭ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

Москва
2016

Руководитель федеральной комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФИПИ.
Авторы–составители: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, П.В. Семёнов, А.В. Семенов, А.С. Трепалин.

Методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2016 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений» на 2016 г. Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике.

В методических материалах дается краткое описание структуры контрольных измерительных материалов 2016 г. по математике, характеризуются типы заданий с развернутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы ответы участников ЕГЭ 2013–2015 гг., а также диагностических и тренировочных работ.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 2016 году в структуре заданий КИМ ЕГЭ по математике (профильный уровень) с развёрнутым ответом и критериях оценивания их выполнения произошли совсем небольшие изменения. В основном они коснулись нумерации задач.

	Нумерация заданий							Общ. балл
2015 (7 заданий)	№15	№16	№17	№18	№19	№20	№21	
Максим. балл	2	2	2	3	3	4	4	20
2016 (7 заданий)	№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19	
Максим. балл	2	2	2	3	3	4	4	20

Тематическая принадлежность заданий осталась в основном неизменной. Размещение в одном столбце приведённой таблицы заданий, соответственно, №15 и №13, №16 и №14, …, № 21 и №19 подчеркивает совпадение общей тематики этих заданий. А именно, в 2016 году, задание №13 – уравнение, №14 – стереометрия, №15 – неравенство, №16 – планиметрия, №17 – текстовая задача экономического содержания, №18 – задание с параметром, №19 – дискретная математика.

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут иметь место в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развернутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

Так как нумерация заданий с развернутым ответом трижды менялась за три последних года, то в тексте настоящих УММ мы довольно часто приводим не только нумерацию 2016 года, но и две предыдущие. Например, оборот «задание 18 (=20 =С5)» означает, что мы имеем дело с заданием 18 этого года, которое соответствует 20-й позиции в прошлогоднем ЕГЭ и, соответственно, заданиям С5 2010–2014 гг.

Статистические данные о результатах ЕГЭ по математике предыдущего года, которые мы используем в тексте, взяты из Аналитического отчета ФИПИ за 2015 год.

Авторы признательны участникам семинара ФИПИ от 28 января 2015 г., за обсуждение предложенных решений и их оценок.

§1 Критерии проверки и оценка решений заданий 13 (15 в 2015 г., С1 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ-2016.

Задания №13 занимают одну из важнейших позиций в структуре КИМ. К их выполнению в 2015 г. приступало более 60% участников профильного ЕГЭ, а положительные баллы получили более 30% всех участников. Успешность выполнения заданий этого типа является характеристическим свойством, различающим базовый и профильный уровни подготовки учащихся. Поэтому при подготовке выпускников к экзамену решению заданий подобного уровня следует уделять много внимания.

Подчеркнем, что выделение решения уравнения в отдельный пункт *а* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос п. *а* задание №13 следует оценивать не более чем 1 баллом.

В дискуссиях с представителями региональных групп экспертов неоднократно высказывалось предложение о смягчении критериев выставления 1 балла. А именно, предлагалось поступать так и в тех случаях, когда в решении п. *а* допущена вычислительная ошибка или описка, не повлиявшая на полноту всего решения. В критериях оценивания заданий с развернутым ответом ЕГЭ 2014–2016 эти предложения были учтены.

Содержание критерия, №15 УММ–2015	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получен ответ неверный из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия, №15 ЕГЭ–2015	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Небольшое уточнение с «неверный ответ» до «неверные ответы» подчеркивает тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка (описка) стала причиной того, что неверны оба ответа, полученные при выполнении п. *а* и п. *б*.

Сохранена такая структура критериев и в 2016 г.

В демонстрационном варианте ЕГЭ это задание остаётся практически неизменным вот уже пятый год подряд.

Задача 13 (демонстрационный вариант 2016 г).

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

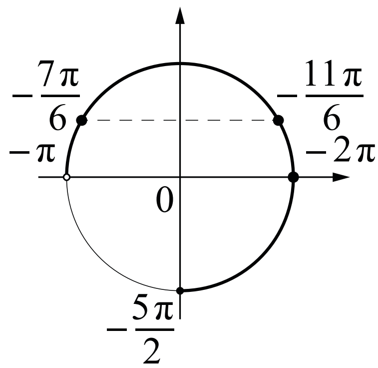
$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x;\ 2\sin^2 x - \sin x = 0;\ \sin x\left(2\sin x - 1\right) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.



Получаем числа: $-2\pi;\ -\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) πn, $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $-2\pi;\ -\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Возвращаясь к критериям, если:

(1) уравнение (см. пример выше) верно сведено к простейшим тригонометрическим уравнениям $\sin x = 0$ и $\sin x = 0,5$;

(2) эти простейшие уравнения не решены или решены с ошибкой;

(3) но при этом отбор корней исходного уравнения верно произведён с помощью тригонометрической окружности, а не по неверно найденным корням простейших тригонометрических уравнений, то по критериям можно выставить 1 балл (получен верный ответ в п. *б*, а его получение обосновано верным сведением к простейшим уравнениям).

В то же время, при наличии (1) и (2) и «верного» отбора по неверно решенным простейшим уравнениям следует выставлять 0 баллов: любые ошибки, допущенные в тригонометрических формулах, в нахождении значений тригонометрических функций не относятся к вычислительным.

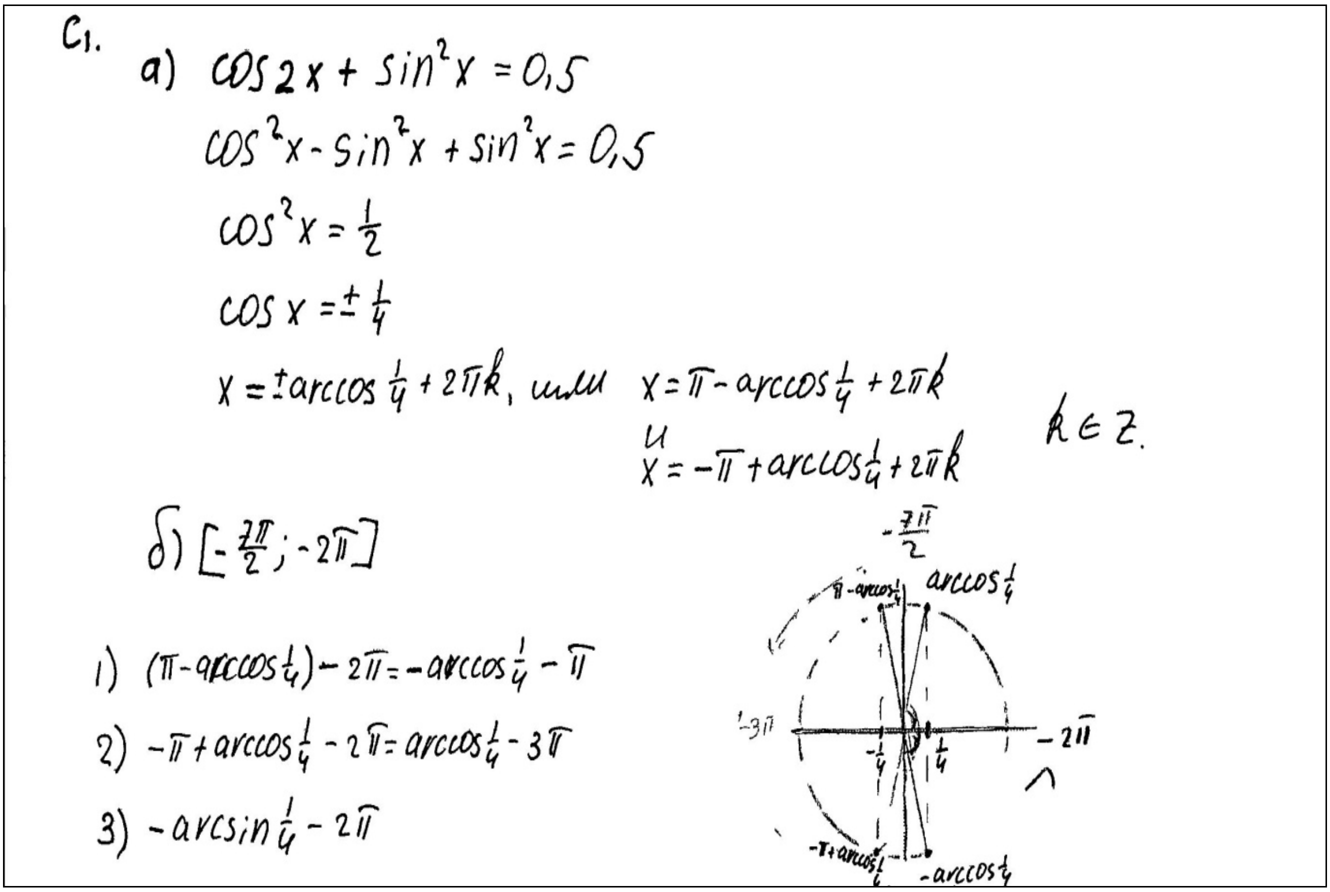
Примеры оценивания решений заданий 13

Пример 1.

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{(2n-1)\pi}{4},\ n \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.



C1.

а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0,5$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm\frac{1}{4}$

$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$, или $x = \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$
и
$x = -\pi + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$ $\quad k \in Z$.

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

1) $(\pi - \arccos\frac{1}{4}) - 2\pi = -\arccos\frac{1}{4} - \pi$

2) $-\pi + \arccos\frac{1}{4} - 2\pi = \arccos\frac{1}{4} - 3\pi$

3) $-\arcsin\frac{1}{4} - 2\pi$

***Комментарий*.**

Работа не пустая. Она цитирует УММ 2014 года, где за эту работу был выставлен 1 балл. Объяснение состояло в том, что при переходе от $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ к $\cos x = \pm\frac{1}{4}$ допущена очевидная вычислительная ошибка, а уравнение $\cos x = \pm\frac{1}{4}$ решено верно, и затем произведён отбор. К сожалению, в этом отборе есть и описка в 3), есть и ошибка в 1): отобранный корень не принадлежит нужному отрезку.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{(-1)^n \pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};\ \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$.

С1

а) $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$-2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$

$-\sin x\,(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad$ $2\sin x + \sqrt{2} = 0$

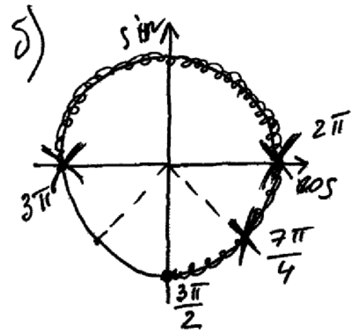
$x_1 = \pi n,\ n \in z$ $\qquad$ $2\sin x = -\sqrt{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in z$

$x_3 = -\frac{3\pi}{4} + \pi m,\ m \in z$

б)



Ответ: а) $x_1 = \pi n,\ n \in z$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in z$

$x_3 = -\frac{3\pi}{4} + \pi m,\ m \in z$

б) $\frac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$

Комментарий.

Типичный пример выставления 1 балла по критериям 2014, 2015 гг. При решении второго простейшего тригонометрического уравнения «пропал» множитель 2 в периоде. Но верный отбор корней произведён не по формуле, а по тригонометрической окружности.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

С1. а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$

б) корни из $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

Решение.

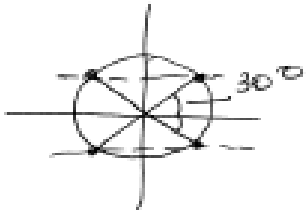
а) $\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$ Т.к. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$

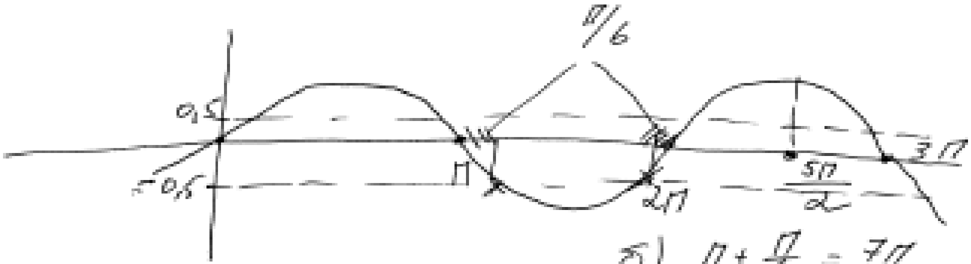
$1 - \frac{3}{4} = 2\sin^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$



б)



б) $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi p \end{array}\right.$ $k, n, m, p \in Z$

Комментарий.

Правильные ответы обоснованно получены в пунктах *а* и *б*.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 4.

а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{23\pi}{6}$.

15) а) $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$ $\quad\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$

$2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$

$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$

Пусть $\cos x = y$, тогда

$4y^2 + 4\sqrt{3}y - 9 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 48 + 4\cdot 9\cdot 4 = 48 + 144 = 192$

$y_1 = \frac{-4\sqrt{3} + 8\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2 = \frac{-4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{8} = \frac{-12\sqrt{3}}{8} = -1{,}5\sqrt{3}$

Вернёмся к замене:

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos x = -1{,}5\sqrt{3}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $\qquad$ нет корней, так как $-1 \le \cos x \le 1$

б) $\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \ \Big| -\frac{\pi}{6}$ $\qquad \frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \ \Big| +\frac{\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{3} \le 2\pi k \le \frac{23\pi}{6} \ \Big| : 2\pi$ $\qquad \frac{8\pi}{3} \le 2\pi k \le \frac{25\pi}{6} \ \Big| : 2\pi$

$\frac{7}{6} \le k \le \frac{23}{12}$ $\qquad \frac{8}{6} \le k \le \frac{25}{12}$

k – нет $\Rightarrow$ нет корней $\qquad k = 2 \to x = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

б) $\frac{23\pi}{6}$

Комментарий. Нигде в решении нет описания значений параметра *k,* но при отборе корней явно указано целое значение. Считаем, что выставление наивысшего балла возможно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 5.

а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6};\ \frac{17\pi}{6}$.

15. а) $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$

$2\cos 2x - 4\sin x + 1 = 0$

$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$2\cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - 4\sin x = 0$

$3\cos^2 x - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$3\cos^2 x - \sin x(\sin x + 4) = 0$

$3(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$3 - 3\sin^2 x - \sin^2 x - 4\sin x = 0$

$-4\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

Пусть $\sin x = t \quad -1 \le t \le 1$

$4t^2 - 4t - 3 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 + 48 = 64$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{8} = \nearrow \frac{12}{8} =$ не уд.

$\searrow -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Вернемся к исходной переменной

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

б) Отберем корни на $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{9\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{3} \le 2\pi k \le \frac{11\pi}{6}$

$\frac{4}{3} \le 2k \le \frac{11}{6}$

$\frac{4}{6} \le k \le \frac{11}{12}$ нет целых k

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{9\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{12\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}$

$\frac{4\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{7\pi}{6}$

$\frac{1}{3} \le 2k \le \frac{7}{6}$

$\frac{1}{6} \le k \le \frac{7}{12}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

б) $\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{5}{4} \le 2k \le \frac{11}{4}$

$\frac{5}{8} \le k \le \frac{11}{8}$

$k = 1: \quad x = \frac{9\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le 3\pi$

$\frac{3}{4} \le 2k \le \frac{9}{4}$

$\frac{3}{8} \le k \le \frac{9}{8}$

$k = 1: \quad x = \frac{11\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

б) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4}$

Комментарий. Странный случай. В тексте много верных вещей. В п. *а* сначала написан верный ответ $x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi k$. Но потом появляется угол в $\frac{\pi}{4}$ (!!!?). В результате оба ответа неверны не из-за вычислительной ошибки.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

а) Решите уравнение $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6};\ -\frac{17\pi}{6}$.

N 15

$8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cdot\cos x + 1 = 0$

а) $8\cdot(1-\cos^2 x) + 2\sqrt{3}\cdot\cos x + 1 = 0$

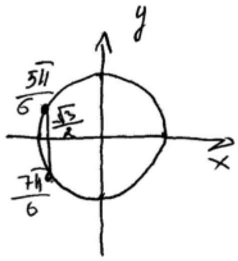
$-8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cdot\cos x + 9 = 0$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$-8t^2 + 2\sqrt{3}\cdot t + 9 = 0$

$D = 300$

$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $t_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$



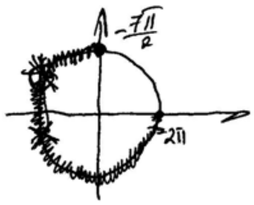
обратная замена

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ $x = \arccos\frac{3\sqrt{3}}{4} + 2\pi n, n \in Z$

не уд условию $-1 \le \cos x \le 1$.

б) $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$k=0$, $x = \pm\frac{5\pi}{6}$

$k=-1$, $x = \pm\frac{7\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий.
Практически всё верно, только отобранные корни не принадлежат нужному отрезку. Верно выполнен только первый пункт.

Оценка эксперта: 1 балл.

§2. Критерии проверки и оценка решений заданий 14 (16 в 2015 г., С2 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Задания 14 являются практически полным аналогом заданий №16 и С2 КИМ ЕГЭ предыдущих лет. Стереометрическая задача позиционируется как задача для большинства успевающих учеников, а не только для избранных. В связи с этим в КИМах предлагается достаточно простая задача по стереометрии, решить которую возможно с минимальным количеством геометрических построений и технических вычислений. Итак, в заданиях 14 прежними остались уровень сложности, тематическая принадлежность (геометрия многогранников) и максимальный балл (2 балла) за их выполнение.

Несколько изменилась структура постановки вопроса. Как и в прошлом году, она разделена на пункты *а* и *б* примерно так же, как и задание 13. Соответственно уточнился и общий характер оценивания выполнения решений. Для получения 2 баллов нужно, чтобы выполнялись два условия одновременно (конъюнкция), а для получения 1 балла хватает выполнения хотя бы одного из этих условий (дизъюнкция).

Содержание критерия, задание №14 (=16), 2015 и 2016 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* И обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Пункт *а* в заданиях 14 может по разному соотноситься с пунктом *б*. А именно, он может быть утверждением независимым от *б*, дополняющим или проверяющим понимание общей конструкции. Возможен и второй вариант, когда в пункте *а* следует доказать утверждение, необходимое для полной корректности вычислений в пункте *б*. В первой ситуации независимость условий *а* и *б* приводит и к независимости проверки их выполнения. Во второй ситуации вполне может встретиться примерно следующий текст.

«*Задание 16……   . а) Докажите, что…; б) Найдите площадь….*
Решение.
У меня а) не получилось. Используем а) при решении б)… далее верное и обоснованное (без выполнения пункта *а*) вычисление……».

Хуже того, вместо честного признания о «нерешаемости» *а* может быть предъявлено неполное и, даже, неверное доказательство. И в том, и в другом случае за верное решение пункта *б* <u>следует выставлять 1 балл.</u> Позиция разработчиков КИМ состоит в том, что в первую очередь следует поощрять за достижения, а не наказывать за промахи. Тем самым, часть «обоснованно получен верный ответ в пункте *б*» критерия на 1 балл более точно было бы сформулировать как «обоснованно (по модулю п. *а*) получен верный ответ в пункте *б*».

Отметим также часто задаваемый экспертами вопрос, связанный с проверкой решения задач на нахождение угла. Вид ответа может отличаться от приведённого в критериях по проверке заданий с развёрнутым ответом. Это отличие не может служить основанием для снижения оценки. (Кстати, последнее верно для проверки любого задания, не обязательно задания по стереометрии). Главное, чтобы ответ был правильным. Например, если в образце решения стоит $\arcsin 0,6$, а у выпускника в ответе $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$, то справедливость равенства $\arcsin 0,6 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{24}{7}$ эксперту следует проверить самостоятельно.

Отдельно скажем о применении различных формул аналитической геометрии, которыми несколько излишне увлекаются некоторые специалисты. Разумеется, никакого запрета на их использование нет. Однако, если по критериям 2014 года адекватное использование некоторой формулы с допущенной вычислительной ошибкой можно оценить в 1 балл, то условие «обоснованно получен верный ответ в пункте *б*» критериев 2016 года в таком случае уже не выполнено и (если нет доказательства *а*) следует выставлять 0 баллов.

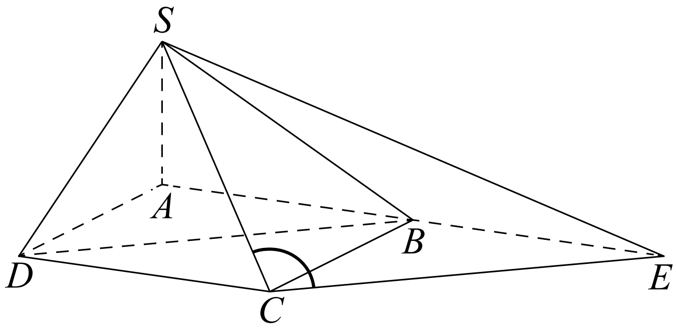
Задание 1 (№16, ЕГЭ 2015 г).

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Решение.



а) В треугольнике SAB имеем:

$$SB^2 = 85 = 21 + 64 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB. Аналогично, из равенства

$$SD^2 = 57 = 21 + 36 = SA^2 + AD^2$$

получаем, что $\angle SAD = 90°$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, прямая SA перпендикулярна плоскости ABD.

б) На прямой AB отметим такую точку E, что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Найдём угол SCE. По теореме Пифагора:

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10;\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 11 \text{ и } SE^2 = SA^2 + AE^2 = 277.$$

По теореме косинусов:

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos\angle SCE;\ 277 = 121 + 100 - 220\cos\angle SCE;$$

$$\cos\angle SCE = -\frac{14}{55}.$$

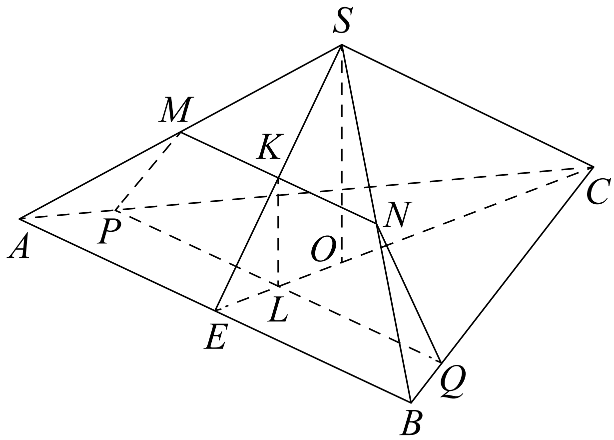
Искомый угол равен $\arccos\frac{14}{55}$. **Ответ**: б) $\arccos\frac{14}{55}$.

Задание 2 (№16, ЕГЭ 2015 г).

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.



Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN.

Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Следовательно, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE = 5:1$.

б) Прямая CE перпендикулярна KL и PQ, поэтому прямая CE перпендикулярна плоскости MNQ. Прямые AB и PQ параллельны, значит, расстояние от вершины A до плоскости сечения равно расстоянию

от точки E до плоскости сечения, то есть $EL = \dfrac{CE}{6} = 5\sqrt{3}$.

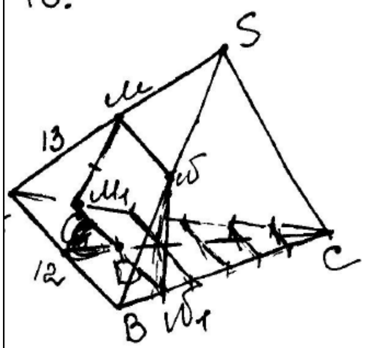
Ответ: б) $5\sqrt{3}$**.**

Примеры оценивания выполнения заданий 14

Пример 1.
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Ответ: б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$.

16.



Дано: прав. пирамида $SABC$
ΔABC – основание
$AB = 12$, $SA = 13$ CE – медиана ΔABC
т. M – середина SA
т. N – середина SB
пл-ть $\alpha \perp ABC$ ($NM \in \alpha$)

а) D – ты пл-ть α делит CE $(5:1)$
$(CD:DE = 5:1)$

б) Найти: S

т. D – дополнительная точка

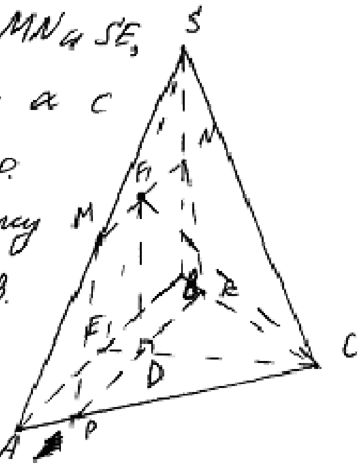
а) D – во:

Проведем перпендикуляр т. M на прямую AC (назовем MM_1).
Проведем перпендикуляр т. N на прямую BC (назовем NN_1).
Соединим точки M_1 и N_1 (прямая M_1N_1), $\Rightarrow$ т. D лежит на прямой M_1N_1.
Разделим стороны AC и BC на 6 равных частей и соединим точки соответственно. (6 частей прямой CE)
Все прямые, в том числе и MM_1, будут параллельны стороне AB.

***Комментарий*.** Решения пункта *б* нет, а в пункте *а* нет обоснования того, что при делении на 6 равных частей мы обязательно попадем в нужные точки.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2.
а) см. Пример 1, только «сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$».
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.
Ответ: 12.



16. а) Обозначим F - точка пересечения MN и SE,
K, D и P - точки пересечения плоскости α с
отрезками BC, EC и AC соответственно.
M и N - середины рёбер SA и SB, поэтому
MN - средняя линия $\triangle ASB$, $MN \parallel AB$.
Пирамида SABCD правильная, её
боковые рёбра и стороны основания
равны ($SA = SB = SC = 4\sqrt{3}$; $AB = BC = AC = 6$).
~~$AM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}SB = BN$~~ KP - линия пересечения плоскости α с
плоскостью ABC. CE - медиана равностороннего треугольника
$\triangle ABC$, она является высотой ~~[illegible]~~ $AE = BE = AB \cdot \frac{1}{2} =$
$= 3$, $\angle AEC = 90°$, по т. Пифагора $EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
В $\triangle ASC$ и $\triangle BSC$ $\angle SAC = \angle SBC$ (боковые грани правильной пирамиды
равны), $AM = BN$, в $\triangle AMP$ и $\triangle BNK$ $\angle AMP = \angle BNK$, поэтому $\triangle AMP = \triangle BNK$,
$AP = BK$, $MP = NK$. В $\triangle ABC$ $AP = BK$ и $AC = BC \Rightarrow PC = KC$, $\angle CKP = \angle CPK =$
~~[illegible]~~ $= \frac{1}{2}(180° - \angle BCA) = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = \angle ABC = \angle BAC$. $\triangle PKC \sim \triangle ABC$,
$AP = BK \Rightarrow AB \parallel PK$ как прямые, отсекающие равные отрезки от
сторон угла. $AE = BE = \frac{1}{2}AB = 3$, SE - медиана равнобедренного
треугольника $\triangle ASB$, $SE \perp AB$, в $\triangle ASE$ по т. Пифагора $SE = \sqrt{AS^2 - AE^2} =$
$= \sqrt{48-9} = \sqrt{39}$.

Комментарий.
Чертёж верный, но доказательство утверждения пункта *а* отсутствует и пункт *б* не выполнен. Хотя в тексте решения есть разумные выводы, которыми автор решения воспользоваться не смог. (Может создаться впечатление, что решение не до конца скопировано из оригинального текста работы. Нет, в работе действительно нет никакого продолжения.)

Оценка эксперта: 0 баллов.

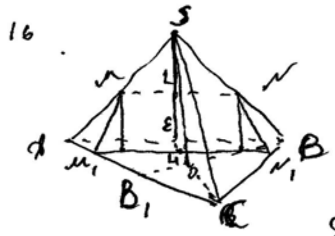
Пример 3.

а) см. Пример 1, только «сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4».

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Ответ: $8+2\sqrt{2}$**.**

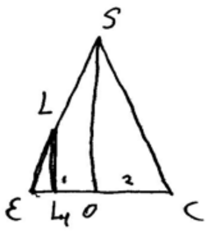
16.



Дано: $SABC$ – правильная пирамида, $AB=6$; $SA=4$.
$AM=MS$; $CN=SN$, $\alpha \perp ABC$.
а) доказать: $\frac{CO}{OE}=\frac{5}{1}$
б) найти: $P_{MM_1NN_1}$.
Доказательство.

а) 1. соединим MN; из точек M и N опустим перпендикуляры на плоскость ABC; соединим точки, M_1MNN_1 – искомое сечение.

2. Рассмотрим $\triangle CSE$
CE – медиана, SO – высота $\Rightarrow \frac{CO}{OE}=\frac{2}{1}$



3. $LL_1 \perp ABC$ (по постр.), SO – высота $\Rightarrow LL_1 \parallel SO$.

4. Рассмотрим $LL_1 \parallel SO$
По т. Фалеса
$LE=LS$ (т.к. MN – средняя линия) $\Rightarrow EL_1=L_1O$.

5. Пусть $EL_1=x$, тогда $L_1O=x$; $OC=4x$.
$\frac{EL_1}{L_1O}=\frac{x}{x+4x}=\frac{1}{5}$.
ч.т.д.

б) 1) MN – средняя линия $\Rightarrow MN=\frac{1}{2}AB$.
2) из п. а) следует, что $\frac{AB}{M_1N_1}=\frac{6}{5}$ (при подобии $\triangle M_1N_1C \sim \triangle ABC$)
~~3) По т. Пифагора $LL_1=\sqrt{LE^2-L_1E^2}=\sqrt{4-\frac{1}{6}\cdot OE}=\sqrt{4-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{AC^2-AE^2}}=\sqrt{4-\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\ldots}}{2}$.~~
$AM_1=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{\ldots}}{2}\right)^2}=3$.
~~4)~~ 3) $P=3+2\cdot 3+5=14$.
Ответ: б) $P=14$; а) см. док-во.

Комментарий. Сечение построено верно и обоснованно получена величина отношения 5:1. В «Доказать» заявлено доказательство другого отношения, но эта описка никак не повлияла на дальнейшее. В п. *б* есть неверный ответ и зачеркнутое решение, т.е. нет решения.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 4.

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC. **Ответ:** $\frac{60}{13}$.

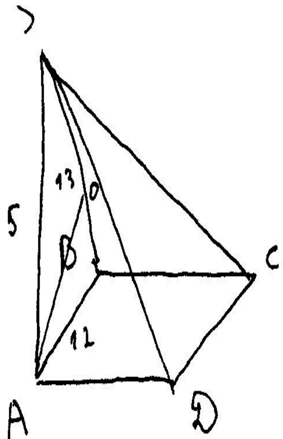
№16

а) ~~Нам нужно док-ть, что~~

Дано $ABCDS$ - пир. $ABCD$ - прямоуг.

$AB = 12$; $BC = 5\sqrt{3}$; $SA = 5$; $SB = 13$; $SD = 10$

Док-ть: SA - высота пир



Док-во: расм ΔSBA; $AB = 12$; $SB = 13$ A

$SA = 5$ (по усл.); воспользуемся теоремой Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ и сопоставим

$13^2 = 5^2 + 12^2$ $\Rightarrow SO$ гипотенуза $\Rightarrow \angle SAO$ - прямой; $AB \ni (ABCD)$

$169 = 169$

$SA \perp AB \Rightarrow \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ высота пирамиды $ABCDS$

б) AO - раст до (SBC)

$S_\Delta SAB = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$

$S_\Delta SAB = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot h$;

$h = 4\frac{8}{13}$

Ответ: $4\frac{8}{13}$;

Комментарий. Утверждение пункта *а* не доказано. В пункте б найдена высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, но никак не обоснованно, что это расстояние от точки A до плоскости SBC.

Оценка эксперта: 0 баллов.

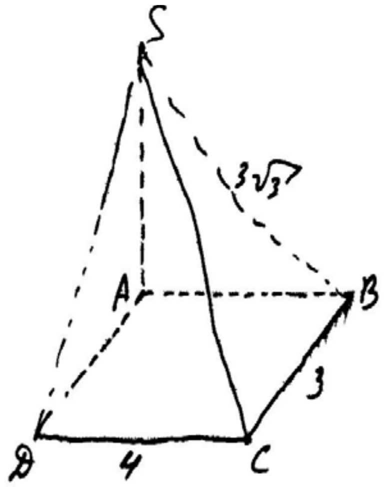
Пример 5.

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Ответ: 30°.



№16

Дано:
пирамида SABCD
$AB=4$
$BC=3$
$SA=\sqrt{11}$
$SB=3\sqrt{3}$
$SD=2\sqrt{5}$

док-ть: SA - высота пир.
найти ∠ между SC и (ASB)

Док-во
а)
т.к. ABCD - прямоуг. $\Rightarrow$ $AD=CB=3$, $AB=CD=4$

$SA^2+AB^2=11+16=27$
$SB^2=27$
$AD^2+SA^2=11+9=20$
$SD^2=20$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle SAD$ и $\triangle SAB$ - прямоугольные по т-ме Пифаг-ра и в них углы A - прямые $\Rightarrow SA \perp AB$ и $SA \perp AD$

AD и $AB \in (ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA$ - высота

б) решение

поскольку SA - высота из п. а) $\Rightarrow (SAB) \perp (ABC) \Rightarrow$ [$BC \perp AB$ (по условию, что основание - прямоугольник)] BC будет перпендикулярно к плоскости $(SAB) \Rightarrow SB$ - проекция SC на плоскость (SAB)
$\Rightarrow$ искомый угол - $\angle BSC$

рассматривая его в прям. треугольнике $\triangle BSC$ находим, что

$tg\angle CSB = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle CSB = 30^{\circ}$

Ответ: б) 30°

Комментарий. Всё сделано аккуратно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 6.

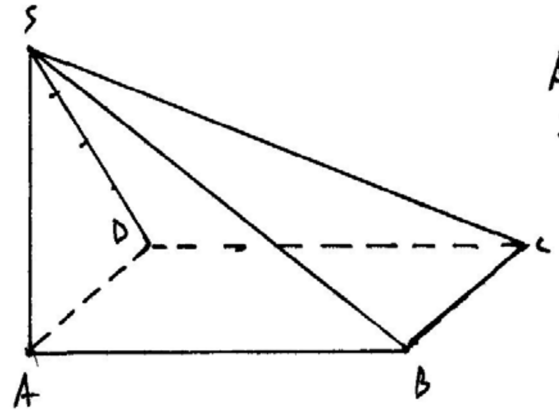
В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Ответ: $\frac{60}{13}$.

16)



$AB=12$; $BC=5\sqrt{3}$

$SA=5$; $SB=13$; $SD=10$.

а) Если $SA^2+AB^2=SB^2$, то ΔABS - прямоугольный.

$25+144=169$; $\sqrt{169}=13$.

$\angle SAB=90^\circ$.

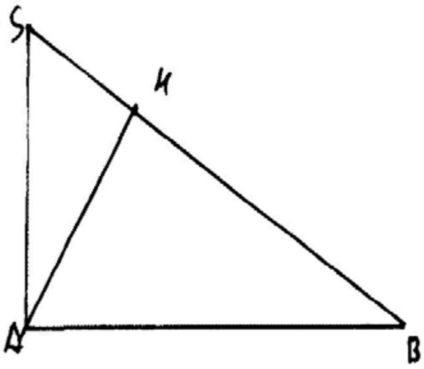
Если $SA^2+AD^2=SD^2$, то ΔADS - прямоугольный.

$25+75=100$; $\sqrt{100}=10$.

$\angle SAD=90^\circ$.

Вывод: SA - высота пирамиды.

б)



AH - расстояние от точки A до плоскости SBC

AH-? ; Δ SBA подобен Δ AHB.

$AH=4,7$.

Комментарий. Обоснованно получено доказательство утверждения пункта *а*, хотя нет ссылки на признак перпендикулярности прямой и плоскости. Верно намечен путь вычисления расстояния от вершины A до плоскости SBC, но реализовать его не удалось.

Оценка эксперта: 1 балл.

§3 Критерии проверки и оценка решений заданий 15 (18 в 2015 г., С3 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Напомним, что на этом месте в КИМ 2011–2014 гг была система двух неравенств, а в 2015 и 2016 году заявлено решение одного неравенства. Грубо говоря, задание №15 «в два раза» проще прежнего задания С3.

Среди различных причин такого изменения отметим внутреннюю для задач на решение неравенств. Дело в том, что критерии проверки задания С3 были весьма лаконичны, жестко структурированы, но в то же время и достаточно беспощадны. Вполне грамотный и хорошо подготовленный выпускник, который допускал в решении каждого из неравенств системы хотя бы по одной неточности, получал 0 из возможных 3 баллов, несмотря на все достижения, которые он продемонстрировал в процессе решения. Например, это приводило к тому, что оценка «2 балла» из трёх была более редкой, чем оценка «3 балла» из трёх.

При переходе к решению одного неравенства поле возможностей при выставлении 0, 1 или 2 баллов несколько расширяется. При этом сразу же подчеркнём, что в данном случае оценка «1 балл» не есть половина оценки «2 балла». Другими словами, утверждение «1 балл ставится, если задача решена наполовину» **<u>неверно.</u>** Более точным является тезис, выражаемый равенством «1 = 2-» или словами «1 балл ставится, если задача почти решена». Для получения 1 балла за выполнение задания №15 необходимо получение итогового ответа и наличие верной последовательности всех шагов решения. Вот как в точности выглядят критерии оценивания выполнения задания №15.

Содержание критерия, №17 (ЕГЭ – 2015)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки …, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Вот одно из видоизменений, связанных с конкретикой задания.

Содержание критерия №17 (ЕГЭ – 2015)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «$<$» вместо «$\le$», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Мы использовали решения заданий №15 из материалов ЕГЭ предыдущего года, а также задания диагностических работ. В них задачи №15 несколько моделируют те типы неравенств, которые встречались в заданиях С3. Были выбраны примеры решения в основном по показательным неравенствам.

Следующие ниже примеры решений мы намеренно приводим в весьма лаконичном стиле. Кратко говоря, это «минимальное» решение, за которое можно выставить максимальный балл.

Задача 1.

Решите неравенство $\dfrac{2}{7^x-7} \ge \dfrac{5}{7^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_7 4),\ (1;\ \log_7 9]$.

Решение. Относительно $t=7^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{2}{t-7} \ge \frac{5}{t-4},\qquad \frac{2(t-4)-5(t-7)}{(t-7)(t-4)} \ge 0,\qquad \frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)} \ge 0,\qquad \frac{t-9}{(t-7)(t-4)} \le 0,$$

откуда $t<4$ или $7<t\le 9$. Возвращаясь к x, получаем: $7^x<4,\quad x<\log_7 4$ или $7<7^x\le 9,\quad 1<x\le \log_7 9$.

Ответ: $\left(-\infty;\log_7 4\right)\ \text{U}\ (1;\ \log_7 9]$.

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

«*Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точки* $x=\log_7 9$*; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения*».

При включении в ответ $x=\log_7 4$ или $x = 1$ ставится оценка «0 баллов».

Задача 2.

Решите неравенство $\dfrac{11-5^{x+1}}{25^x-5(35\cdot 5^{x-2}-2)} \ge 1{,}5$.

Решение. Относительно $t=5^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{11-5t}{t^2-7t+10} \ge \frac{3}{2},\qquad \frac{2(11-5t)-3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)} \ge 0,\qquad \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)} \ge 0,\qquad \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)} \ge 0,$$

откуда $1\le t<2$ или $\dfrac{8}{3}\le t<5$.

Возвращаясь к x, получаем $0\le x<\log_5 2,\qquad \log_5\dfrac{8}{3}\le x<1$.

Ответ: $[0;\ \log_5 2)\cup\left[\log_5\dfrac{8}{3};\ 1\right)$.

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

«*Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точек x = 0 и/или x =* $\log_5 \frac{8}{3}$*; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения*».

При включении в ответ $x = 1$ или $x = \log_5 2$ ставится оценка «0 баллов».

Задача 3.

Решите неравенство $\log_2 \frac{x}{8} - 1 \le \frac{1}{\log_2 \frac{4}{x}}$.

Решение. Относительно $t = \log_2 x$ неравенство имеет вид:

$$(t-3) - 1 \le \frac{1}{2-t}, \qquad \frac{(2-t)(t-4)-1}{2-t} \le 0, \qquad \frac{-t^2+6t-9}{2-t} \le 0, \qquad \frac{(t-3)^2}{t-2} \le 0,$$

откуда $t < 2$ или $t = 3$. Возвращаясь к x, получаем $\log_2 x < 2,\ 0 < x < 4$ или $\log_2 x = 3$, $x = 8$.

Ответ: $(0;4) \cup \{8\}$.

Вот как выглядят в данном случае критерии выставления 1 балла.

«*Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного ответа исключением точки x = 8; ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения*».

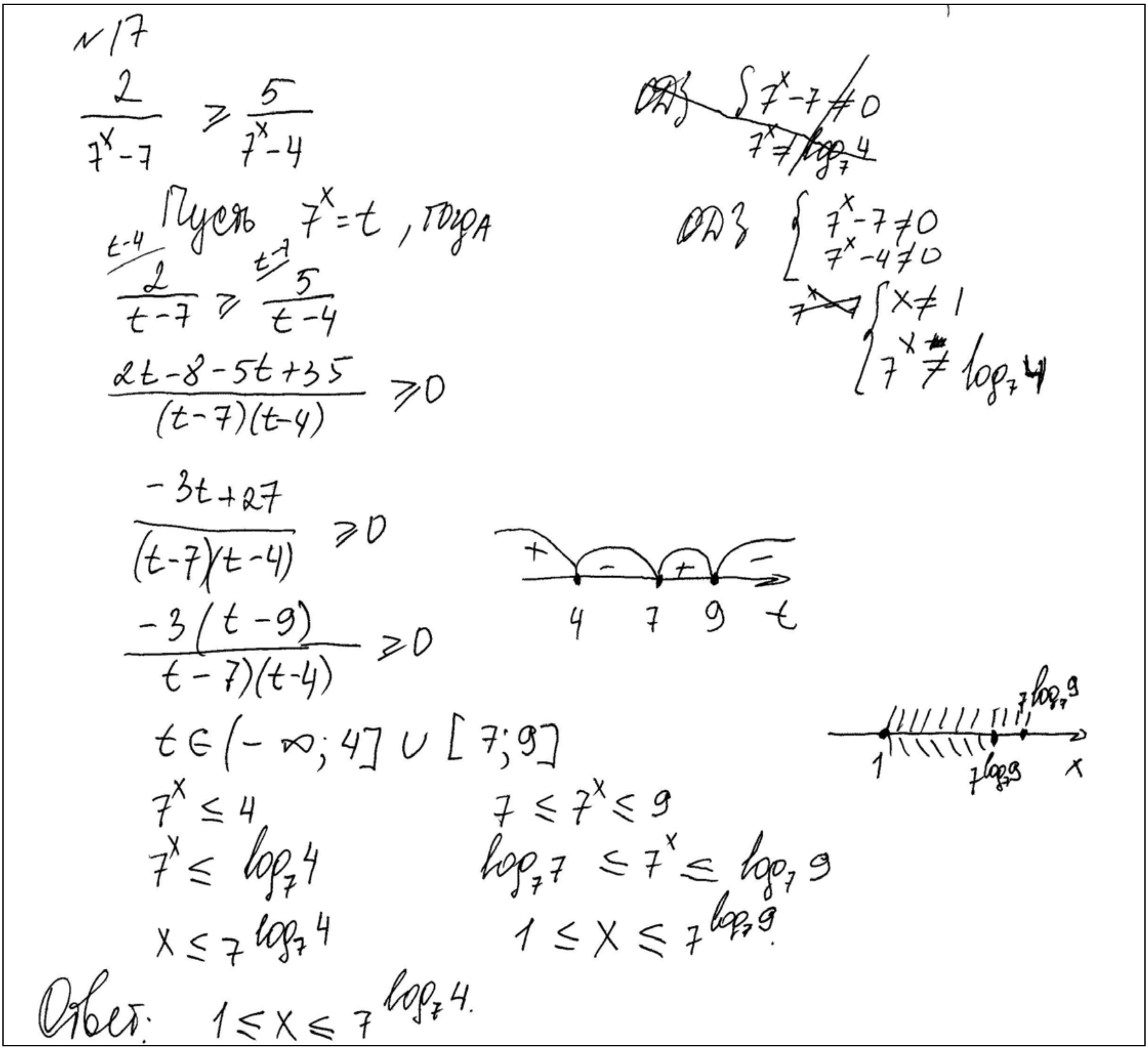
При включении в ответ $x = 0$ или $x = 4$ ставится оценка «0 баллов».

Примеры оценивания решений заданий 15

Пример 1.

Решите неравенство $\dfrac{2}{7^x-7} \geq \dfrac{5}{7^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_7 4),\ (1;\ \log_7 9]$.



№17

$$\frac{2}{7^x-7} \geq \frac{5}{7^x-4}$$

~~ОДЗ~~ $\cancel{\begin{cases} 7^x-7\neq 0 \\ 7^x \neq \log_7 4 \end{cases}}$

ОДЗ $\begin{cases} 7^x-7\neq 0 \\ 7^x-4\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 1 \\ 7^x \neq \log_7 4 \end{cases}$

Пусть $7^x=t$, тогда

$$\frac{2}{t-7} \geq \frac{5}{t-4}$$

$$\frac{2t-8-5t+35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3(t-9)}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$t \in (-\infty; 4] \cup [7; 9]$

$7^x \leq 4$ $\qquad$ $7 \leq 7^x \leq 9$

$7^x \leq \log_7 4$ $\qquad$ $\log_7 7 \leq 7^x \leq \log_7 9$

$x \leq 7^{\log_7 4}$ $\qquad$ $1 \leq x \leq 7^{\log_7 9}$.

Ответ: $1 \leq x \leq 7^{\log_7 4}$.

Комментарий. Хотя рациональное неравенство «почти» решено, в работе много ошибок. Похоже, автор не разобрался в логарифмах даже на простейшем уровне.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2.

Решите неравенство $\dfrac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\ge 0,5$.

Ответ: $\{0\}\cup(1;2)$.

17) $\dfrac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27} \geqslant 0,5$

Пусть $3^x = y$, тогда $\dfrac{13-5y}{y^2-12y+27} \geqslant 0,5$

$\dfrac{13-5y-0,5(y^2-12y+27)}{y^2-12y+27} \geqslant 0$

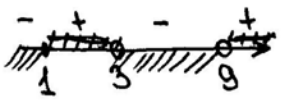
$\dfrac{13-5y-0,5y^2+6y-13,5}{y^2-12y+27} \geqslant 0$

$\dfrac{-0,5y^2+y-0,5}{y^2-12y+27} \geqslant 0$ $\quad -0,5y^2+y-0,5=0 \quad y^2-12y+27=0$

$D = 1-4\cdot 0,5\cdot 0,5 = 0$ $\quad$ по теореме Виета $y_1=3$, $y_2=9$

$\dfrac{0,5y^2-y+0,5}{y^2-12y+27} \leqslant 0$ $\quad y = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$\dfrac{(y-1)}{(y-9)(y-3)} \overset{\leqslant}{\cancel{\geqslant}} 0$



Вернёмся к замене:

$3^x \leqslant 1 \quad 3^x > 3^1 \quad 3^x < 9$

$x \leqslant 0 \quad x > 1 \quad x < 2$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (1; 2)$

Комментарий. Можно отметить верную последовательность всех шагов решения, за исключением неравенства с множителем $(y-1)^2$. Далее, конечно, ошибка в применении метода интервалов. Все решения найдены, но к ним «добавлены» посторонние решения. В результате – ответ неверный.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3.

Решите неравенство $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0$.

Ответ: $(-\infty;-\sqrt{2}),\,(-\sqrt{2};\,-1],\{0\},\,[1;\sqrt{2}),(\sqrt{2};+\infty)$.

17. $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geqslant 0$

Пусть $2^{2-x^2}-1=t$ $\quad t>0$

$\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+1\geqslant 0$

$\frac{3-4t+t^2}{t^2}\geqslant 0$

$t^2-4t+3=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=4 \\ t_1\cdot t_2=3 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} t_1=3 \\ t_2=1 \end{array}\right.$

$\frac{(t-1)(t-3)}{t^2}\geqslant 0$

0 1 3

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0 \\ t\le 1 \end{cases} \\ t\geqslant 3 \end{array}\right.$ Вернемся к замене $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2-x^2}-1>0 \\ 2^{2-x^2}-1\le 1 \end{cases} \\ 2^{2-x^2}-1\geqslant 3 \end{array}\right.$

$\frac{2^2}{2^{x^2}}$ пусть $2^{x^2}=m$, $m>0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{4}{m}-1>0 \\ \frac{4}{m}-1\le 1 \end{cases} \\ \frac{4}{m}-1\geqslant 3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>4 \\ m\le 2 \end{cases} \\ m\geqslant 1 \end{array}\right.$

Вернемся к замене

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2}>4 \\ 2^{x^2}\le 2 \end{cases} \\ 2^{x^2}\geqslant 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2>2 \Rightarrow x>2 \\ x^2\le 1 \quad -1<x<1 \end{cases} \\ x^2\geqslant 0 \quad x=0 \end{array}\right.$

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)\cup[0]$

Комментарий. В результате компенсирующих ошибок и частично верных утверждений получена «часть» множества решений неравенства. Но имеются грубейшие ошибки.

Оценка эксперта. 0 баллов.

Пример 4.

Решите неравенство $\dfrac{5^x}{5^x-4}+\dfrac{5^x+5}{5^x-5}+\dfrac{22}{25^x-9\cdot 5^x+20}\le 0$.

Ответ: $\{0\}$, $(\log_5 4;\,1)$.

17. $\dfrac{5^x}{5^x-4}+\dfrac{5^x+5}{5^x-5}+\dfrac{22}{25^x-9\cdot5^x+20}\leqslant 0$;

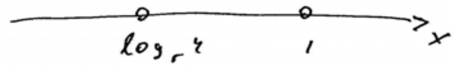
ОДЗ: $\begin{cases}5^x-4\ne 0\\ 5^x-5\ne 0\\ 25^x-9\cdot5^x+20\ne 0\end{cases}$

$5^x=4$ $5^x\ne 5$ $5^{2x}-9\cdot5^x+20\ne 0$

$x=\log_5 4$ $x\ne 1$ $D=81-80=1$

$5^x\ne 4$ $5^x\ne$

$x\ne\log_5 4$ $x\ne 1$



ОДЗ: $x\in(-\infty;\log_5 4)\cup(\log_5 4;1)\cup(1;+\infty)$.

$\dfrac{5^x}{5^x-4}+\dfrac{5^x+5}{5^x-5}+\dfrac{22}{(5^x-4)(5^x-5)}\leqslant 0$;

$\dfrac{5^x(5^x-5)+(5^x+5)(5^x-4)+22}{(5^x-4)(5^x-5)}\leqslant 0$;

$\dfrac{2\cdot5^{2x}-4\cdot5^x+2}{(5^x-4)(5^x-5)}\leqslant 0$

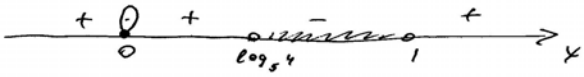
Решим методом интервалов

$2\cdot5^{2x}-4\cdot5^x+2=0$ $5^x-4=0$ $5^x-5=0$

$D=16-16=0$. $x=\log_5 4$ ~~log~~ $x=1$.

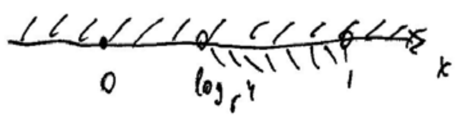
$5^x=1$

$x=0$



см. далее

Вывудем с ОДЗ:



Ответ: $x\in\{0\}\cup(\log_5 4;1)$.

***Комментарий*.** Можно отметить не самый удачный путь к «цели», но способ решения не оценивается. Ответ правильный и получен с приемлемым обоснованием.

Оценка эксперта. 2 балла.

Пример 5.

Решите неравенство $\frac{11-5^{x+1}}{25^x-5(35\cdot 5^{x-2}-2)} \geq 1,5$.

Ответ: $[0;\log_5 2) \cup [\log_5 \frac{8}{3};1)$.

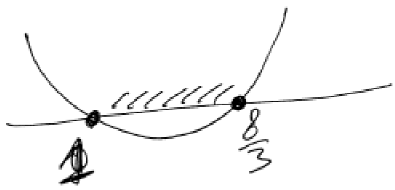
17 $\frac{11-5^{x+1}}{25^x-5(35\cdot5^{x-2}-2)} \geq 1,5$

$\frac{11-5\cdot5^x}{(5^x)^2-7\cdot5^x+10} \geq \frac{3}{2} > 0$, $22-10\cdot5^x \geq 3(5^x)^2-21\cdot5^x+30$

$3\cdot(5^x)^2-11(5^x)+8 \leq 0$

$5^x = \frac{11\pm\sqrt{121-96}}{6} = \frac{11\pm5}{6}$; $5^x=1$, $x=0$

$5^x=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$ $x=\log_5\frac{8}{3}$



Ответ $[0;\log_5\frac{8}{3}]$

Комментарий.

Вычислительных ошибок в ходе преобразований нет. Есть грубая ошибка в преобразовании первого же неравенства, которое решается по правилу пропорции (см. пунктиры).

Судя по тексту решения, его автор неверно усвоил совет типа «если всё положительно, то от знаменателей можно избавляться крест-накрест»: ведь не просто так написано, что 3/2 > 0.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

Решите неравенство $\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{16}\right)$ U $\left[\frac{1}{4}; \ 2\right]$.

$\log_2 \frac{8}{X} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$

$\frac{\log_2 \frac{8}{X} \cdot \log_2 16x - 10}{\log_2 16x} \geq 0$

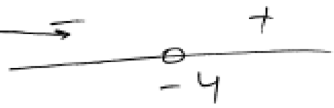
$y = \log_2 X$

$\log_2 \frac{8}{X} = \log_2 8 - \log_2 X = 3 - y$

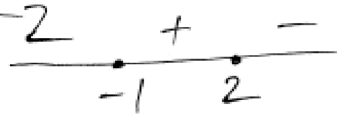
$\log_2 16X = \log_2 16 + \log_2 X = 4 + y$

$\frac{(3-y)(4+y)-10}{4+y} \geq 0$

$\frac{12-4y+3y-y^2-10}{4+y} \geq 0$

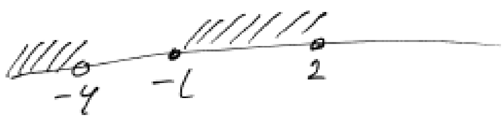


$0 \leq \frac{-y^2-y+2}{4+y}$



$y = \log_2 X < -4$

$0 < X < 2^{-4}$



$-1 \leq \log_2 X \leq 2$

$2^{-1} \leq X \leq 2^2$

Ответ $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 4\right]$

Комментарий. Типичный 1 балл. Путаница в корнях квадратного уравнения, а потом всё верно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 7 Условие см. пример 1. **Ответ:** $(-\infty;\ \log_7 4),\ (1;\ \log_7 9]$.

$$\frac{2}{7^x-7}-\frac{5}{7^x-4}\geq 0$$

$$y=\frac{2}{7^x-7}-\frac{5}{7^x-4}$$

замена $7^x = t,\ t>0$

$$y=\frac{2}{t-7}-\frac{5}{t-4}$$

$$D(y)\ \begin{cases} t\neq 7 \\ t\neq 4. \end{cases}\quad t>0.$$

$$y=0\quad \frac{2}{t-7}-\frac{5}{t-4}=0$$

$$\frac{2t-8-5t+35}{(t-7)(t-4)}=0$$

$$-3t=-27$$

$$t=9.$$

$+\quad -\quad +\quad -$

$0\quad 4\quad 7\quad 9$

$$t\in(0;4)\cup(7;9]$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<7^x<4 \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;\log_7 4) \\ \begin{cases} 7<7^x\leq 9 \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(1;\log_7 9] \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;\log_7 4)\cup(1;\log_7 9]$.

Комментарий. Ответ неверный, все шаги решения присутствуют, но «случайно» использовалось верное неравенство $t>0$ при записи значений x. Это не может трактоваться как "получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения".

Оценка эксперта: 0 баллов.

§4 Критерии проверки и оценка решений заданий 16 (18 в 2015 г., С4 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

В планиметрических заданиях заметное структурное и содержательное изменение произошло в 2014 году. В пункте *а* теперь нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

С точки зрения разработчиков включение проверяемого элемента на доказательство в задание 16 должно повысить уровень подготовки школьников. Кроме того, такое доказательство является естественным продолжением практики использования заданий на доказательство в экзамене за курс основной школы. По фактическим данным выполнения задание 16 является границей, разделяющий высокий и повышенный уровень подготовки участников ЕГЭ.

В 2016 году изменений в структуре и тематическом содержании этих заданий нет. С учетом опыта проведения ЕГЭ–2015 небольшая корректировка проведена лишь в критериях выставления 1 и 2 баллов.

Содержание критерия, задание №16 (=18), 2016 г.	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача 1

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

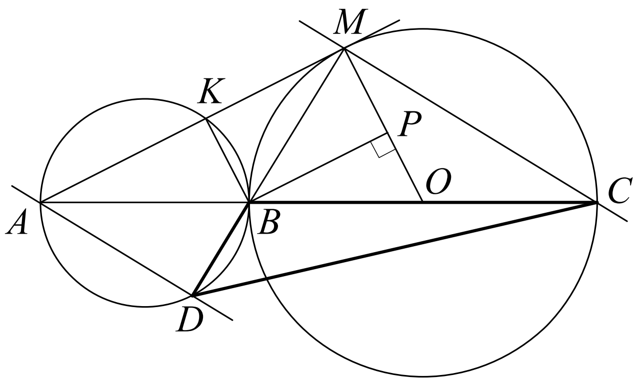
а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение.

а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC = \angle BDA = 90°.$$



Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.

б) Пусть O — центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому $OB = OM = 5x$.

Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник $BKMP$ — прямоугольник,

$$BP = KM = 12,\ OP = OM - MP = OM - BK = 5x - x = 4x.$$

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$, откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$.

Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC} = S_{MDC} - S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MBC} = S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC} = S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15x = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30.$$

Ответ: б) 30.

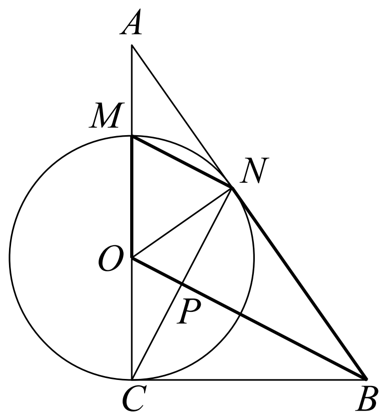
Задача 2.

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

Решение.



а) Поскольку прямые AC и BC перпендикулярны, прямая BC — касательная к окружности. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, прямая BO перпендикулярна прямой CN. Точка N лежит на окружности с диаметром CM, поэтому $\angle CNM = 90°$. Прямые BO и MN перпендикулярны одной и той же прямой CN, следовательно, они параллельны.

б) Пусть $AM = 2x$, $MC = 6x$. Тогда $OC = 3x$, $OA = 5x$, $AC = 8x$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому BO — биссектриса треугольника ABC. По свойству биссектрисы

$$\frac{BC}{AB} = \frac{OC}{OA} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Пусть $AB = 5a$, $BC = 3a$. Тогда по теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = 4a.$$

Поэтому $a = 2x$. Следовательно, $BC = 6x$.

Пусть отрезки BO и CN пересекаются в точке P. Тогда P — середина CN, а OP — средняя линия треугольника CNM. Поскольку $\angle CMN = \angle COB$, прямоугольные треугольники CNM и BCO подобны, откуда

$$MN = \frac{CN \cdot CO}{BC} = \frac{4 \cdot 3x}{6x} = 2; \; OP = \frac{1}{2}MN = 1.$$

Из прямоугольного треугольника BNO находим:

$$BP = \frac{NP^2}{OP} = \frac{4}{1} = 4; \; BO = BP + OP = 4 + 1 = 5.$$

По формуле площади трапеции $S_{BOMN} = \dfrac{BO + MN}{2} \cdot NP = \dfrac{5+2}{2} \cdot 2 = 7$.

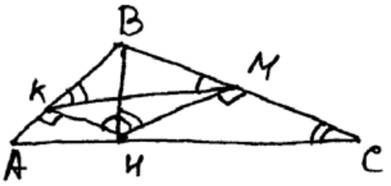
Ответ: б) 7.

Как и во всякой сложной геометрической задаче, весьма деликатным является вопрос о степени и характере обоснованности построений и утверждений. Позиция разработчиков КИМ состоит в том, что при решении задания №16 (=18=С4) невозможно от выпускников школ на экзамене требовать изложения, приближающегося к стилю учебников и методических статей. Достаточным является наличие ясного понимания геометрических конфигураций искомых объектов, верного описания (предъявления) этих конфигураций и грамотно проведённых рассуждений и вычислений. Обратим также внимание на то, что часто при решении геометрических задач школьники ссылаются на весьма неразумительный чертёж, а иногда чертёж вообще отсутствует (если рисунок сделан на бланке карандашом, то эта область не сканируется). Снижать оценку только за это не рекомендуется.

Примеры оценивания заданий 16

Пример 1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.
а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.
б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4. **Ответ:** $9/55$.

Дано:
ΔABC

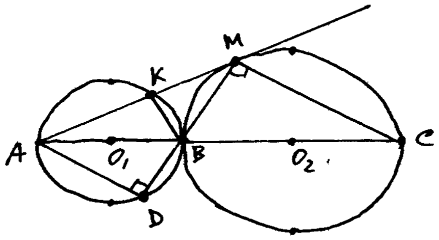


а) четырехугольник BMHK вписан. т.к. $\angle BKH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BHM = \angle BKM$
$\angle MHC = 90^\circ - \angle MHB$
$\angle MCH = 90^\circ - \angle MHC = \angle MHB = \angle MKB$
Таким образом, ΔBKM подобен ΔABC по двум углам ($\angle ABC$ – общий)
б) По теореме синусов:
$\frac{AC}{\sin B} = 2 \cdot 4 \Rightarrow AC = 8 \sin B$
Площадь ΔABC, $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \sin B = 12 \sin B$
Рассмотрим окруж., описанную вокруг ΔBMK (она же описана вокруг BMKH): $\angle BKH = 90^\circ \Rightarrow BH$ – ее диаметр $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ее радиус равен 1,5.
По т. синусов:
$\frac{MK}{\sin B} = 2 \cdot 1{,}5 \Rightarrow MK = 3 \sin B$
коэф. подобия $k = \frac{MK}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
S_1 – площадь ΔMBK, S_2 – площадь ΔKMC
$\frac{S_1}{S} = k^2 = \frac{1}{16}$ $S_1 = \frac{S}{16}$
$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S_2 = S \cdot \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{15}$

Комментарий.
Доказательство в пункте *а* верно, хотя в первой строке – описка. В *б* есть ошибка по невнимательности (12 вместо 8) при нахождении коэффициента подобия, но присутствуют «верно» выполненные все шаги решения.
Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2. См. задача 1. **Ответ**: б) 30.

№18



Дано:

Отрезок AC, $B \in AC$.

$O_1 \in AB$; $O_1A = O_1B$; $O_2 \in BC$; $O_2B = O_2C$

Окр. $(O_1; AO_1)$, окр. $(O_2; O_2C)$

AM - касат. к $(O_2; O_2C)$, M - т. кас-я.

$AM \cap (O_1; AO_1) = K$; $MB \cap (O_1; AO_1) = D$

а) Док-ть, что $AD \parallel MC$

б) $AK = 3$, $MK = 12$, $S_{DBC} = ?$

Решение:

а) $\angle ADB$ опир. на диаметр AB $\Rightarrow \angle ADB = 90° \Rightarrow AD \perp BD \Rightarrow AD \perp MD$

$\angle BMC$ опир. на диаметр $BC \Rightarrow \angle BMC = 90° \Rightarrow MC \perp MB \Rightarrow MC \perp MD$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow MC \parallel AD$, что и требовалось доказать.

б) Пусть $KB = x$. $\angle AKB = 90°$, т.к. опир. на диаметр AB.

$\angle MKB = 90°$. Пусть $\angle KBA = \alpha$, тогда $\angle KAB = 90° - \alpha$

$\angle \cancel{AKD}\, KAB = \angle KDB \overset{= 90° - \alpha}{}$, т.к. опир. на одну дугу $\cup KB$

Тогда $\angle ABD = \alpha$, $\angle BAD = 90° - \alpha \Rightarrow \triangle AKB = \triangle ADB$ по стороне и 2-м прилеж. углам.

MA и MD - 2 секущие к окр-ти $(O_1; O_1A) \Rightarrow \angle AMD = \frac{\cup KB + \cup AD}{2}$.

$\cup KB = 90 - \alpha$, $\cup AD = \alpha$.

$\angle AMD = \frac{90}{2} = 45°$

~~$\frac{\cup KB + \cup AD}{2} = 90° \Rightarrow \cup KB + \cup AD = 180°$.~~

Тогда $x = 12$, $AB = 13$; По т. о касат. и секущей

$KM^2 = AB \times AC$

$225 = 13 \times (13 + BC) \Rightarrow 225 - 169 = 13BC$

$56 = 13BC \Rightarrow BC = \frac{56}{13}$

$\angle DBC = \angle ABM = 45° + \alpha = 45° + \arcsin\frac{3}{13}$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{56}{13} = \frac{336}{65}$

Ответ: $\frac{336}{65}$

Комментарий. Доказательство в пункте *а* верно. В *б* (4-я строка, *б*) есть ошибка: утверждение $\angle ABD = \alpha$ неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

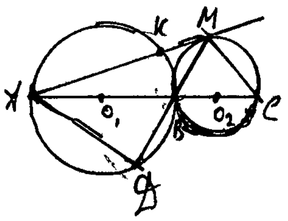
б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Ответ: б) 30.

№ 18

~~Док-ть AB~~ Дано: $B \in [AC]$, $AK = 4$, $MK = 12$.

Док-ть: $(AD) \parallel (MC)$



Решение:

Док-во:

$\angle ADB$ - впис. и опирается на диаметр, сл-но $(AD) \perp (MD)$

$\angle BMC$ - впис. и опир на диаметр, сл-но $(MC) \perp (MD)$

$\left.\begin{array}{l}(AD) \perp (MD)\\(MC) \perp (MD)\end{array}\right\} \Rightarrow (AD) \parallel (MC)$ (если 2 несовпадающ. прямые перпенд. одной прямой, то они парал.)

Найти: S_{DBC}.

Решение

Комментарий.

Доказательство в пункте *а* верно. Решение задачи пункта *б* отсутствует.

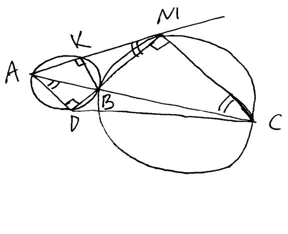
Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 4.

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 14$. Ответ: б) $\frac{147\sqrt{5}}{5}$.



а) $\angle ABD = \angle MBC$ (вертик)

$\angle ADB = \angle BMC$ (т.к. опир. на диаметры и равны $90°$)

$\Downarrow$

$\triangle ADB \sim \triangle CMB$

$\Downarrow$

$\angle BAD = \angle MCB$

$\angle BAC = \angle BDA$ (накрест. лежащие)

$\Downarrow$

$AD \parallel MC$

б)

$\triangle ADM \sim \triangle BKM$ (~~одн~~ $\angle AMD$ – общий, $\angle MKB = \angle MDA = 90°$)

$\frac{AD}{KB} = \frac{AM}{MB} = \frac{MD}{MK}$ (1)

$\frac{AD}{KB} = \frac{21}{MB} = \frac{MD}{14}$

$\angle AMD = \angle MCB$ (угол между касат и хорд)

$\Downarrow$

$\angle AMD = \angle DAB$ (т.к. $\angle MCB = \angle DAB$ из-за подобия)

$\Downarrow$

$\triangle ADB \sim \triangle MDA$

$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{AM}$ (2)

$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{21}$

Из прежде доказанного подобия $\triangle ABD$ и $\triangle CBM$:

$\frac{AD}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{DB}{MB} \Longrightarrow \triangle ABM \sim \triangle DBC$ (по отнош. 2-х сторон и углу)

Из (1): $\frac{AD}{KB} = \frac{MD}{14} \Rightarrow \frac{AD}{MD} = \frac{KB}{14}$.

Из (2): $\frac{AD}{MD} = \frac{AB}{21}$

$\Downarrow$

$\frac{KB}{14} = \frac{AB}{21} \Longrightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{2}{3} = \sin\angle KAB$

$\cos\angle KAB = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Downarrow$

$\frac{AK}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Downarrow$

$AB = \frac{21}{\sqrt{5}}$

AM – отрезок касательной, следовательно:

$AM^2 = AB \cdot (AB + BC)$

$441 = \frac{21}{\sqrt{5}}\left(\frac{21}{\sqrt{5}} + BC\right)$

$21 = \frac{21}{5} + \frac{BC}{\sqrt{5}}$

$BC = \frac{84}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{4}$ (коэф подобия между ~~△ABD~~ $\triangle DBC$ и $\triangle ABM$)

$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle MAB \cdot AM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{\sqrt{5}} \cdot 21 = \frac{147}{\sqrt{5}}$

$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABM} \cdot k^2 = \frac{147 \cdot 16}{\sqrt{5}} = \frac{2352}{\sqrt{5}}$

Ответ: $\frac{2352}{\sqrt{5}}$

Комментарий. Доказательство в пункте, *а* верно. Пункт *б* содержит много верных утверждений, но в этом пункте получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки. Верно найдена площадь треугольника ABM. Но далее автор решения не заметил, что треугольники ABM и CBD – равновелики!

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 5.

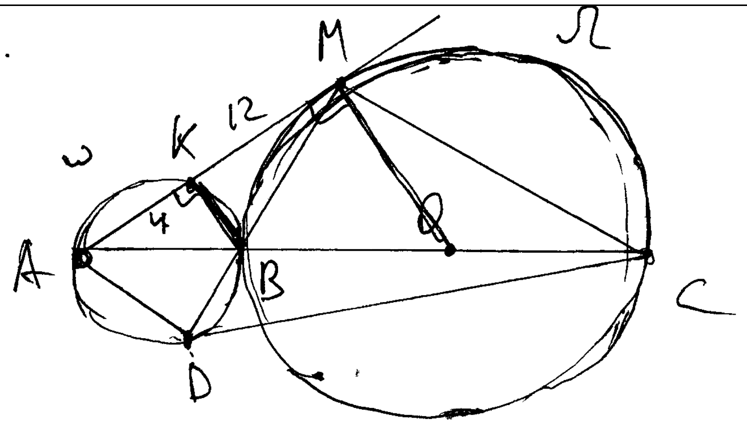
Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 4$ и $MK = 12$.

Ответ: $\frac{96}{\sqrt{7}}$

18.



Дано:
А-В-С
АВ-диам. ω,
ВС-диам. Ω
АМ кас. Ω
АМ ∩ ω = {K, M}
МВ ∩ ω = {B, D}
Дано АK=4, МK=12
Д-ть: AD ∥ MC
Н-ти: $S_{\triangle DBC}$

а) AB, BC — диаметры ω и Ω соотв. ⇒
⇒ $\angle ADB = \angle BMC = 90° = \angle AKB$
по св.-ву окр-ти

$\angle MBC = \angle ABD$ — как верт.

в △ABD и △BMC равны градусы

углов! $\angle ADB = \angle BMC$; $\angle MBC = \angle ABD$ ⇒ $\angle BAD = \angle BCM$,
по сумме углов тр-ка

рассм. прямые AD, MC и секущую AC. Внутр. накрест лежащие углы равны ⇒ AD ∥ MC
ч.т.д.

б) Пусть O — центр Ω, r-радиус ω, R-радиус Ω;
~~OM~~ $\angle AMO = 90°$ по опр. кас. к окр-ти,
$\angle AKB = 90°$, тогда у △AKB и AMO есть общий угол A и ~~равный~~ рав. $\angle AMO = \angle AKB$ ⇒ $\triangle AKB \sim \triangle AMO$.
коэф. — $\frac{4}{4+12} = \frac{1}{4}$. Тогда $AB = \frac{1}{4} AO$ ⇒ $2r = \frac{1}{4}(2r+R)$ ⇒

$\Rightarrow 8r = 2r + R$

$\Updownarrow$

$R = 6r$

по т-о кас. и секущей! $AM^2 = AB \cdot AC \Rightarrow$

$\Rightarrow 16^2 = 2r(2r+2R) = 2r(2r+12r) = 28r^2$

$\Downarrow$

$r^2 = \frac{256}{28} \Rightarrow (2r)^2 = \frac{256}{7}$

рассм. △ AKB. По теореме Пифагора:

$AK^2 + KB^2 = AB^2$

$\Downarrow$

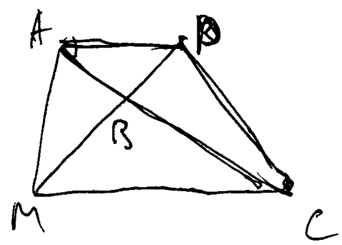
$16 + KB^2 = \frac{256}{7} \Rightarrow KB^2 = \frac{256-112}{7} = \frac{144}{7} \Rightarrow KB = \frac{12}{\sqrt{7}}$.

~~S△~~ $\angle AKB = 90^\circ \Rightarrow BK$ - высота △ $ABM \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\triangle ABM = \frac{1}{2} BK \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot 16 = \frac{6 \cdot 16}{\sqrt{7}} =$

$= \frac{96}{\sqrt{7}} = \frac{96\sqrt{7}}{7}$.

$AD \parallel MC \Rightarrow AMCD$ - трап. с осн. AD и MC



$S_\triangle MCA = S_\triangle MCD$, т.к. высоты на MC равны (из непр-ти AD и MC) и осн. MC одно и то же,

тогда $S_\triangle AMC - S_\triangle ABC = S_\triangle MDC - S_\triangle ABC$

$\Rightarrow S_\triangle ABM = S_\triangle BDC = \frac{96\sqrt{7}}{7}$.

Ответ: $\frac{96\sqrt{7}}{7}$.

Комментарий.

Доказательство в пункте, *а* верно. Пункт *б* не содержит неверных утверждений и результатов вычислений. В частности, автор решения увидел, что фигура *AMCD* – трапеция и значит, треугольники *ABM* и *CBD* – равновелики!

Оценка эксперта: 3 балла.

§5 Критерии проверки и оценка решений заданий 17 (19 в 2015 г.) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Введение текстовых задач экономического содержания в ЕГЭ–2015 по математике стало, пожалуй, наиболее заметным изменением во всем комплексе заданий КИМ с развёрнутым ответом. Во всех заданиях этого типа предыдущих лет условие с самого начала формулировалось в математических терминах и отдельно не предполагало построения какой-либо математической модели (частично этот момент мог присутствовать в некоторых способах решения заданий С5 с параметром). Некоторое исключение составляло задание С6, в котором явно текстовое, сюжетное, условие задачи на начальном этапе решения предполагало некоторый перевод на математический язык. Правда, сами тексты условий чаще всего уже активно использовали математическую терминологию: числа, записанные на доске, делимость, доли и дроби, средние величины и т.п.

В заданиях №17 (=19) существенно усилена сюжетная, практико–ориентированная, составляющая условия. Относительно существования (возможностей существования) непосредственных связей этих задач с окружающей нас действительностью можно составить отдельный трактат. Мы ограничимся лишь констатацией двух положений. Во-первых, сами сюжеты не есть прямые цитаты «из жизни», они априорно уже являются некоторыми текстовыми упрощениями, моделями, реально возникающих ситуаций. Во-вторых, эти сюжеты условно можно разделить на два типа, использующих соответственно дискретные модели (проценты, погашения кредитов, …) и непрерывные модели (различные производства, протяженные во времени, объемы продукции, …). Процитируем критерии оценивания выполнения заданий №19 из КИМ-2015.

Содержание критерия, задание 17 (=19)	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее, 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условия выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования. Например, при отыскании экстремума решение ограничивается верным нахождением лишь критической точки, без надлежащей её проверки на экстремальность. Кратко, « 2 = 3- ».

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям (см. ниже задачу 2) и доведён до верного решения. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (алгебраической, геометрической, функциональной, …) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

Задача 1.

1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Решение №1.1 («по-взрослому»).

Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть $S-$сумма (в тыс. руб.) кредита; S_n-задолженность в $n-$й месяц; s_n – выплата в $n-$й месяц, $s_n = s$; $q-$коэффициент ежемесячного повышения, $q > 1$. Тогда

$$S_1 = qS - s, \qquad S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2S - (1+q)s, \qquad S_3 = qS_2 - s = q^3S - (1+q+q^2)s, \ldots$$

После предпоследней выплаты останется $S_{N-1} \le s$ и тогда в последний, $N-$й раз, кредит будет погашен. Значит, $S_{N-1} = q^{N-1}S - (1+q+q^2+\ldots+q^{N-2})s \;=\; q^{N-1}S - \dfrac{q^{N-1}-1}{q-1}s \;\le\; s$.

Относительно $x = q^{N-1}$ получаем неравенство

$$(q-1)xS - (x-1)s \le (q-1)s, \qquad x((q-1)S - s) \le (q-2)s.$$

По условию $S = 900, \ \ s = 300, \ \ q = 1{,}01$, т.е. $x \cdot (-291) \le -297$, $x = 1{,}01^{N-1} \ge \dfrac{297}{291} = 1{,}0206....$

Так как $1{,}01^2 = 1{,}0201 < 1{,}0206...,\quad 1{,}01^3 = 1{,}030301 > 1{,}0206...$, то $N-1 = 3, \quad N = 4$.

Ответ: 4.

Решение №1.2 («по-детски»).

Если бы банк не брал процентов, то долг можно было бы вернуть за 3 месяца. Банк за 3 месяца возьмет меньше, чем 3% от первоначальной суммы в 900 тыс., т.е. меньше 27 тыс. Поэтому то, что забирает банк, точно можно будет оплатить в 4-й месяц, потратив меньше 300 тыс.

Ответ: 4.

Задача 2.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть 15-го числа текущего месяца долг равен x, а 15-го числа предыдущего месяца долг равен y. Тогда в конце предыдущего месяца долг равен $1{,}05y$ и поэтому выплата в первой половине текущего месяца равна $1{,}05y - x$.

Значит, в процентах от суммы кредита выплаты в феврале составили $1{,}05 \cdot 100 - 90 = 15$%, в марте составили $1{,}05 \cdot 90 - 80 = 14{,}5$%, в апреле – 14%, в мае – 13,5%, в июне – 13%, а в июле $1{,}05 \cdot 50 = 52{,}5$%. Следовательно, общая сумма выплат составила $28 + 28 + 14 + 52{,}5 = 122{,}5$%.

Ответ: 22,5.

Задача 3.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение 1. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$28,\ \frac{28(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{28\cdot 2}{n},\ \frac{28}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$35,\ \frac{35(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{35\cdot 2}{n},\ \frac{35}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$7+\frac{28}{n},\ \frac{7(n-1)+28}{n},\ \ldots,\ \frac{7\cdot 2+28}{n},\ \frac{7+28}{n}.$$

Получаем: $7+\dfrac{28}{n}=9$, откуда $n=14$. Значит, всего следует выплатить

$$28+7\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=28+7\cdot\frac{15}{2}=80{,}5 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 80,5 млн рублей.

Решение 2. По условию долг уменьшается по арифметической прогрессии:

$$28,\ 28-d,\ 28-2d,\ldots\ldots,0.$$

Первая выплата равна $28\cdot 1{,}25-(28-d)=7+d$. Вторая выплата равна $(28-d)\cdot 1{,}25-(28-2d)=7+0{,}75d$, третья равна $(28-2d)\cdot 1{,}25-(28-3d)=7+0{,}5d$, четвертая равна $(28-3d)\cdot 1{,}25-(28-4d)=7+0{,}25d$ и т.д. Значит, наибольшая выплата – первая, $d=2$, выплат – 14 штук и они составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $-0{,}25d=-0{,}5$.

Общая выплата равна $9+8{,}5+8+\ldots+2{,}5=11{,}5\cdot 7=80{,}5$.

Ответ: 80,5 млн рублей.

Примеры оценивания решений заданий 17

Пример 1.
1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?
Ответ: 4.

19 , Вариант 3

Ответ Хватит расплатиться за четыре месяца

№1 900 000 – 300 000 = 600 000
1% от 600 000 = 6 000
Всего 606000

№2 606 000 – 300 000 = 306 000
1% от 306 000 = 3060
Всего 309060

№3 309 060 – 300 000 = 9060
1% от 9060 = 90руб 60коп
Всего 9150 руб 60 коп

№4 Всё!!!

Комментарий.

Ответ верен. Более того «…построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели…», см. критерии; в данном случае – арифметическая, числовая модель. Однако, эта модель построена **неверно**, т.е. она не соответствует условию. По решению видно, что сначала идет платёж долга, потом – начисление процента, а в условии – наоборот.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 2.
1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?
Ответ: 4.

Вар 3 19 задача

Рассмотрим случай четырех месяцев

	Банк	ВЕ	Долг
1	+ 9 000 = 909 000	− 300 тыс = 609 тыс	609 000
2	+ 6090 = 615090	−300 000	315 090
3	+ 31509 = 346599	−300 000	46599
4	+ 46*599 50 000	< 300 000	0

Ответ: 4

Комментарий.

Здесь и ответ верен, и движение денег в целом описано верно. К сожалению, в вычислениях есть просчет в первой клетке третьей строки. Добавлен не 1%, а 10%. Эта ошибка «играет» в пользу писавшего, но вычислительная ошибка имеется.
Работает критерий на 2 балла, если в «недостаточно обосновано» включить и случай обоснования с вычислительной ошибкой.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

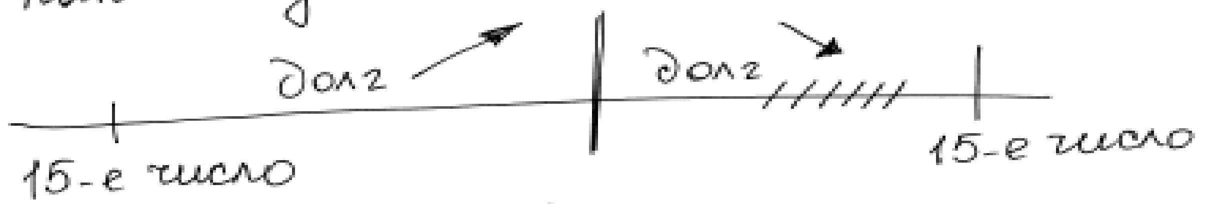
Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ: 22,5.

(19) K – кредит

Как получаются выплаты?



$\frac{n}{10}K$ $\quad \underset{\text{было}}{\frac{n}{10}K + 0{,}05\frac{n}{10}K} \xrightarrow{\text{выплата}} \underset{\text{стало}}{\frac{n-1}{10}K}$

$\text{выплата} = \frac{n}{10}K + 0{,}05\frac{n}{10}K - \frac{n-1}{10}K = \frac{K}{10}(0{,}05n+1)$

Общая выплата $\quad n = 10, 9, 8, 7, 6$

$\frac{K}{10}\Big(\underbrace{5 + 0{,}05(\underbrace{10+9+8+7+6}_{40})}_{2}\Big) = 0{,}7K$

В итоге $0{,}7K + 0{,}5K = 1{,}2K$

Ответ на 20% больше

Комментарий.

Почти правильное решение. Есть один обидный (по невнимательности?) прокол: перед выплатой в июле оставшаяся половина долга также увеличивается на 5%

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 4. См. задача 3. Кредит = 28 млн рублей. Рост на 25%. Выплаты равномерные, наибольший платеж 9 млн. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

Ответ: 80,5 млн рублей.

19. $1{,}25 \cdot 28 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^6 = 10^6(35 - 9) = 26 \cdot 10^6$

После первой выплаты долг равен $26 \cdot 10^6$ рублей значит каждый год сумма уменьшается на $2 \cdot 10^6$ рублей.

	сумма	1 %	после оплаты	сумма ~~взноса~~ платежа
1.	$28 \cdot 10^6$	$35 \cdot 10^6$	$26 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$
2	$26 \cdot 10^6$	$32{,}5 \cdot 10^6$	$24 \cdot 10^6$	$8{,}5 \cdot 10^6$
3	$24 \cdot 10^6$	$30 \cdot 10^6$	$22 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
4	$22 \cdot 10^6$	$27{,}5 \cdot 10^6$	$20 \cdot 10^6$	$7{,}5 \cdot 10^6$

Исходя из первых 4-х платежей можно сделать вывод, что каждый год платеж уменьшается на $5 \cdot 10^5$ рублей, значит общая сумма выплат будет равна:

$10^6(9 + 8{,}5 + 8 + 7{,}5 + 7 + 6{,}5 + 6 + 5{,}5 + 5 + 4{,}5 + 4 + 3{,}5 + 3 + 2{,}5 + 2 + 1{,}5 + 1 + 0{,}5) = 75{,}5 \cdot 10^6$ рублей

Ответ: 75 500000 рублей

Комментарий.

На беглый взгляд – просто вычислительная ошибка, т.е. 2 балла. Смотрим внимательнее. Первые 4 строки заполнены с пониманием дела, разве что нет обоснования того, что именно первая выплата – наибольшая. В целом, верно описана процедура движения финансов: уменьшение долга, уменьшение размеров выплат. Но, судя по первому столбцу, строчек должно быть 14 (кредит взяли на 14 лет), а у автора, судя по последнему столбцу, их 18. К тому же, есть ошибка в подсчете: 9,5x9 явно больше 75,5.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 5. См. задача 3. Кредит =9 млн . Рост на 10%. Выплаты равномерные, наибольший платеж 1,5 млн. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

Ответ: 16,2 млн рублей.

N19. 0) 9.000.000

1) 9.000.000 + 900.000 = 9.900.000 - 1.500.000 = 8.400.000
2) 8.400.000 + 840.000 = 9.240.000 - 1.440.000 = 7.800.000
3) 7.800.000 + 780.000 = 8.580.000 - 1.380.000 = 7.200.000
4) 7.200.000 + 720.000 = 7.920.000 - 1.320.000 = 6.600.000
5) 6.600.000 + 660.000 = 7.260.000 - 1.260.000 = 6.000.000
6) 6.000.000 + 600.000 = 6.600.000 - 1.200.000 = 5.400.000
7) 5.400.000 + 540.000 = 5.940.000 - 1.140.000 = 4.800.000
8) 4.800.000 + 480.000 = 5.280.000 - 1.080.000 = 4.200.000
9) 4.200.000 + 420.000 = 4.620.000 - 1.020.000 = 3.600.000
10) 3.600.000 + 360.000 = 3.960.000 - 960.000 = 3.000.000
11) 3.000.000 + 300.000 = 3.300.000 - 900.000 = 2.400.000
12) 2.400.000 + 240.000 = 2.640.000 - 840.000 = 1.800.000
13) 1.800.000 + 180.000 = 1.980.000 - 780.000 = 1.200.000
14) 1.200.000 + 120.000 = 1.320.000 - 720.000 = 600.000
15) 600.000 + 60.000 = 660.000 - 660.000 = 0

⇓

Что мы выплатили:

1.500.000 + 1.440.000 + 1.380.000 + 1.320.000 + 1.260.000 +
+ 1.200.000 + 1.140.000 + 1.080.000 + 1.020.000 + 960.000 + 900.000 +
+ 840.000 + 780.000 + 720.000 + 660.000 =

см. на обороте

$$
\begin{array}{r}
+1500000\\
+1440000\\
+1380000\\
+1320000\\
+1260000\\
+1200000\\
+1140000\\
+1080000\\
+1020000\\
+960000\\
+900000\\
+840000\\
+780000\\
+720000\\
660000\\
\hline
16200000
\end{array}
$$

Ответ: 16.200.000.

Комментарий. Полная и верная бухгалтерская выписка. Можно попробовать «придраться»: а почему именно первая выплата – наибольшая. Но вряд ли возможно снять 1 балл только за это: ведь реализуемость всех условий представлена.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 6. См. задача 3. Кредит =17 млн . Рост на 10%. Выплаты равномерные, наибольший платеж 3,4 млн. Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?
Ответ: 26,35 млн рублей.

№ 19

1й г.: $17\,000\,000 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 15\,300\,000$

2й г.: $15\,300\,000 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 13\,430000$

3й г.: $13\,430000 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 11\,373\,000$

4й г.: $11373000 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 9\,110\,300.$

см. на обороте

5й г.: $9110300 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 6\,621\,330$

6й г.: $6\,621\,330 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 3883463$

7й г.: $3883463 \cdot 1{,}1 - 3400000 =$
$= 871\,809{,}3$

8й г.: $871809{,}3 \cdot 1{,}1 = 958990{,}23.$

$$\begin{array}{r} 3400000 \\ \times\quad 7 \\ \hline 23800000{,}00 \\ +\quad 958990{,}23 \\ \hline 24758990{,}23 \end{array}$$

Ответ: 24 758 990,23 рубля.

Комментарий. По внешнему виду – почти то же, что и в Примере 5. Но тут принципиальное непонимание условия: всё время вычитается по 3,4 млн., а в конце – получившийся остаток, меньший 3,4 млн. Скорее всего, автор «переготовился» к ЕГЭ по другой модели «экономической» задачи, с так называемыми «аннуитентными» выплатами.

Оценка эксперта: 0 баллов.

§6 Критерии проверки и оценка решений заданий 18 (20 в 2015 г., С5 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ–2016

Как это обычно бывает, задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространенными из них являются:

– чисто алгебраический способ решения;

– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;

– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические моменты, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трех перечисленных способов.

Ниже приведены задачи двух типов из материалов досрочного и основного ЕГЭ–2015, их решения, ответы и соответствующие критерии проверки. Далее в Части 1 приведены 6 примеров решений этих задач на ЕГЭ вместе с комментариями по оценке и самими оценками. Подчеркнём, что каждая задача оценивалась по критериям соответствующего года проведения ЕГЭ. В Части 2 также приведены примеры решений этих же задач, но оценки верности этих решений следует проверить самостоятельно. В Части 3 для проведения зачёта выбраны только решения задач основного ЕГЭ-2015.

Задачи типа 1 и 2 имеют много схожего в своей структуре и условиях:

(1) это системы относительно двух переменных;

(2) это системы с параметром;

(3) первое уравнение системы довольно громоздкое, но не содержит параметр;

(4) уравнение, содержащее параметр, напротив, весьма простое; это уравнение пучка параллельных прямых, или прямых, проходящих через фиксированную точку;

(4) всё начинается с преобразований первого уравнения и его решения;

(5) далее, как правило, удобнее использовать геометрическую интерпретацию;

(6) верное выполнение (4) и (5) гарантирует получение 1 балла;

(7) 3 балла выставляется за практически верное решение; допускаются только 1–2 неточности во включении концевых точек соответствующих промежутков;

(8) оценка в 2 балла – самая редкая.

В то же время, имеются и различия. В основном они связаны с видом первого уравнения. В заданиях первого типа эти уравнения сводятся к произведению двух линейных множителей или же линейного множителя и (простейшего) квадратичного множителя. Такое разложение можно провести или группировкой членов, или решая уравнение, как квадратное относительно одной из переменных.

В заданиях второго типа присутствует модуль. При его раскрытии с помощью выделения полных квадратов всё сводится к дугам двух окружностей. Дальнейший существенный шаг состоит в нахождении угловых коэффициентов касательных в точках пересечения этих окружностей. Без знания того, что для наклонных прямых $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$ (или какого-то аналога нахождения уравнения перпендикуляра к заданной прямой в заданной точке) этот шаг становится почти непреодолимым.

Судя по имеющимся сканам работ, верное нахождение угловых коэффициентов касательных в большинстве случаев гарантировало получение 3 баллов за решение.

Задача 1

Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \ge -3 \\ x + y = a \end{cases}$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Решим первое уравнение:

$$yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \quad yx^2 + 7x^2 + y^2 - 2y - 63 = 0, \quad x^2(y+7) + (y+7)(y-9)$$

$$(y+7)(y + x^2 - 9) = 0, \quad y_1 = -7, \quad y_2 = 9 - x^2.$$

Рассмотрим случай (1): $y = -7$. При любом a получаем одно решение $x = a + 7$, для которого неравенство $x \ge -3$ верно только при $a \ge -10$.

Рассмотрим случай (2): $y = 9 - x^2$, $9 - x^2 = a - x$, $x^2 - x + (a - 9) = 0$. Так как $D = 1 - 4(a-9) = 37 - 4a$, то при $a > 9,25$ корней нет, при $a = 9,25$ получаем один корень $x = 0,5$, при $a < 9,25$ получаем два различных корня. У параболы $y = x^2 - x + (a - 9)$ - ветви вверх, абсцисса вершины равна $0,5 > 0$ и $y(-3) = 3 + a$. Значит, оба корня не меньше -3 при $3 + a \ge 0$, т.е. при $-3 \le a < 9,25$, а при $a < -3$ один корень меньше -3, а другой – больше -3.

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

a	$a < -10$	$-10 \le a < -3$	$-3 \le a < 9,25$	$a = 9,25$	$a > 9,25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

Остается учесть те значения a, при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда $y = -7 = 9 - x^2$, $x = \pm 4$, и из $x + y = a$, $x \ge -3$ получаем, что $x = 4$, $a = -3$.

Ответ: $-10 \le a \le -3$, $a = 9,25$.

Содержание критерия, задача №20, ЕГЭ-2015	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, отличающийся от верного на одно или оба из значений $a = -10$, $a = -3$.	3
Обоснованно получено, что условие задачи выполняется хотя бы в одном из случаев $-10 < a < -3$ или $a = 9,25$.	2
Задача верно сведена к исследованию расположения парабол и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

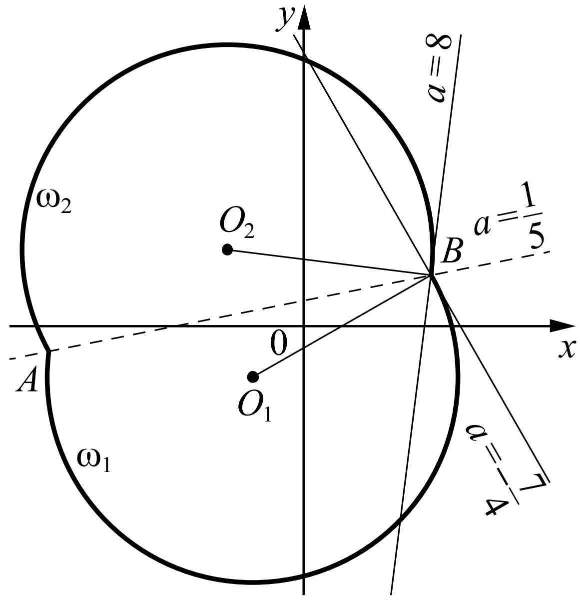
Задача 2.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.



Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5\geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52;$$

$$x^2+4x+y^2+4y-57=0;$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;-2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5\leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52;\ x^2+6x+y^2-6y-47=0;\ (x+3)^2+(y-3)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;-1)$ и $B(5;2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку B и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=\frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B, угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a = 8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -\frac{7}{4}$ или $a > 8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5} < a < 8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4} \le a \le 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4} \le a \le 8$**.**

Содержание критерия, задача №2	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{7}{4}$ и/или $a = 8$	3
При всех значениях *a* верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Примеры оценивания решений заданий 18

Пример 1. Система, см. текст, имеет ровно два решения. **Ответ:** $-8 \le a \le \dfrac{7}{4}$.

№20

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 & (1) \\ y+2=a(x-5) & (2) \end{cases}$$

(1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5y+5 \geq 0 \\ x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \dfrac{-x-5}{5} \\ x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \dfrac{-x-5}{5} \\ x^2+4x+y^2-4y=57 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \dfrac{-x-5}{5} \\ x^2+6x+y^2+6y=47 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \dfrac{-x-5}{5} & (1.1) \\ (x+2)^2+(y-2)^2=65 \end{cases} \\ \begin{cases} y < \dfrac{-x-5}{5} & (1.2) \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases} \end{array}\right.$

$(x+2)^2+(y-2)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $Q(-2;2)$ и $R_1=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т $P(-3;-3)$ и $R_2=R_1=\sqrt{65}$

1.1) $\begin{cases} y \geq \dfrac{-x-5}{5} \\ (x+2)^2+(y-2)^2=65 \end{cases}$

т перес с прямой $y=\dfrac{-x-5}{5}$

$(x+2)^2+\left(\dfrac{-x-5}{5}-2\right)^2=65$

$(x+2)^2+\left(-\dfrac{(x+5)-10}{5}\right)^2=65$

$(x+2)^2+\dfrac{(x+5+10)^2}{25}=65$

$(x+2)^2+\dfrac{(x+15)^2}{25}=65$

$x^2+4x+4+\dfrac{x^2+30x+225}{25}=65$

$25x^2+100x+100+x^2+30x+225-65\cdot 25=0$

$26x^2+130x-1300=0$

$2x^2+10x-100=0$

$x^2+5x-50=0$

$D=25+200=225$

$x_1=\dfrac{-5+15}{2}=5$, $\quad y_1=\dfrac{-5-5}{5}=-2$

$x_2=\dfrac{-5-15}{2}=-10$ $\quad y_2=\dfrac{10-5}{5}=1$

1 2.) $\begin{cases} y < \dfrac{-x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases}$

т перес с пр $y=\dfrac{-x-5}{5}$

$(x+3)^2+\underline{(x+5\ \cancel{+}\ 15)^2}_{25}=65$

$25x^2+6\cdot25x+9\cdot25+(x-10)^2-65\cdot25=0$

$26x^2+150x+225-20x+100-1625=0$

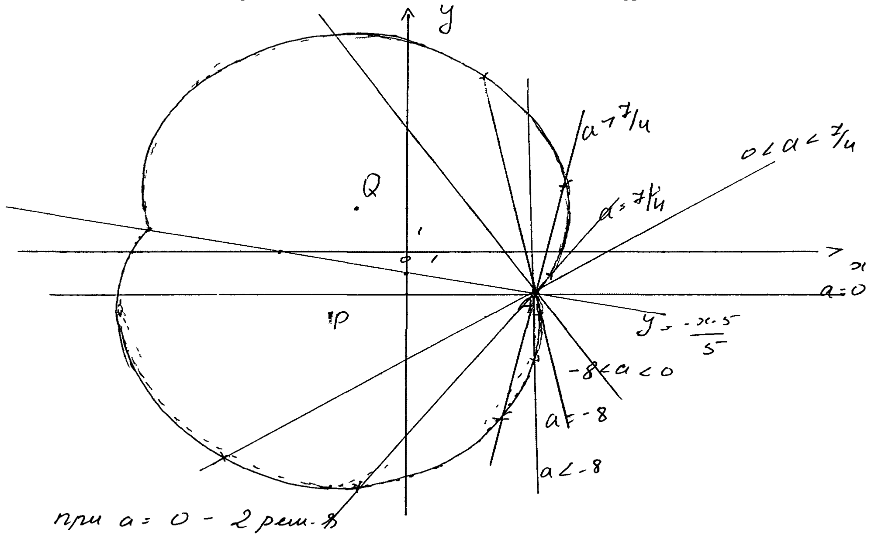
$26x^2+130x-1300=0$

$x^2+5x-50=0$

$x_3=x_1=5$, $y_3=y_1=-2$

$x_4=x_2=-10$ $y_4=y_2=1$

(2) $y=a(x-5)-2$ - ур-е пучка прямых, проход. через т $A(5;-2)$ см продолжение на доп бланке



при $a=0$ - 2 реш-я

найдём a, при к.м $y=a(x-5)-2$ касается окр-ти с ц. в т Q

$(x+2)^2+(a(x-5)-2-2)^2=65$

$x^2+4x+4+(a(x-5)-4)^2=65$

$x^2+4x+4+a^2(x-5)^2-8a(x-5)+16-65=0$

$x^2+4x+a^2(x^2-10x+25)-8ax+40a-45=0$

$\cancel{x^2+4}\ x^2(1+a^2)+x(4-10a^2-8a)+25a^2+40a-45=0$

$\dfrac{D}{4}=(2-5a^2-4a)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$

$(5a^2+4a-2)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$ см продолж на обороте

$25a^4 + 40a^3 + 16a^2 - 20a^2 - 16a + 4 - 25a^4 - 40a^3 + 45a^2 -$

$- 25a^2 - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$

$= 16a^2 - 56a + 49 = 0$ (т.к ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$16a^2 - 56a + 49 = 0$

$\frac{D}{4} = 28^2 - 16\cdot 49 = 0$

$(4a - 7)^2 = 0$

при $a = 7/4$ – 3 реш-я

при $a > 7/4$ – 3 реш-я, при $a \in (0; 7/4)$ – 2 р-я

найдём a, при к-х $y = a(x-5) - 2$ кас. окр-ти ω в т P

$x^2 + 6x + (a(x-5)-2)^2 + 6(a(x-5)-2) - 47 = 0$

$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 47 = 0$

$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$

$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$

$x^2(a^2+1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$

$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2+1)(25a^2 - 10a - 55) =$

$= 9 + 6(a - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$

$- 25a^2 + 10a + 55 = 25a^4 - 10a^3 + a^2 + 6a - 30a^2 +$

$+ 9 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 - 25a^2 + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$

$a^2 + 16a + 64 = 0$ (т.к ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$(a + 8)^2 = 0$

при $a = -8$ – 3 р-я

при $a < -8$ – 3 р-я, при $a \in (-8; 0)$ – 2 р-я

Ответ: 2 р-я при $a \in (-8; 0) \cup (0; 7/4) \cup \{0\}$, т.е при $a \in (-8; 7/4)$

Комментарий. Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме прокола с невключением в ответ концов промежутка.

Довольно показательный пример, когда переход от геометрического способа к алгебраическому способу решения запутывает ситуацию.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 2. Условие см. текст выше, Задача 1. **Ответ:** $-10 \le a \le -3, \quad a = 9{,}25$.

(20)

$$\begin{cases} yx^2+y^2=2y+63-7x^2 \\ x \geq -3 \\ x+y=a \end{cases}$$

$$y^2+y(x^2-2)+(7x^2-63)=0$$

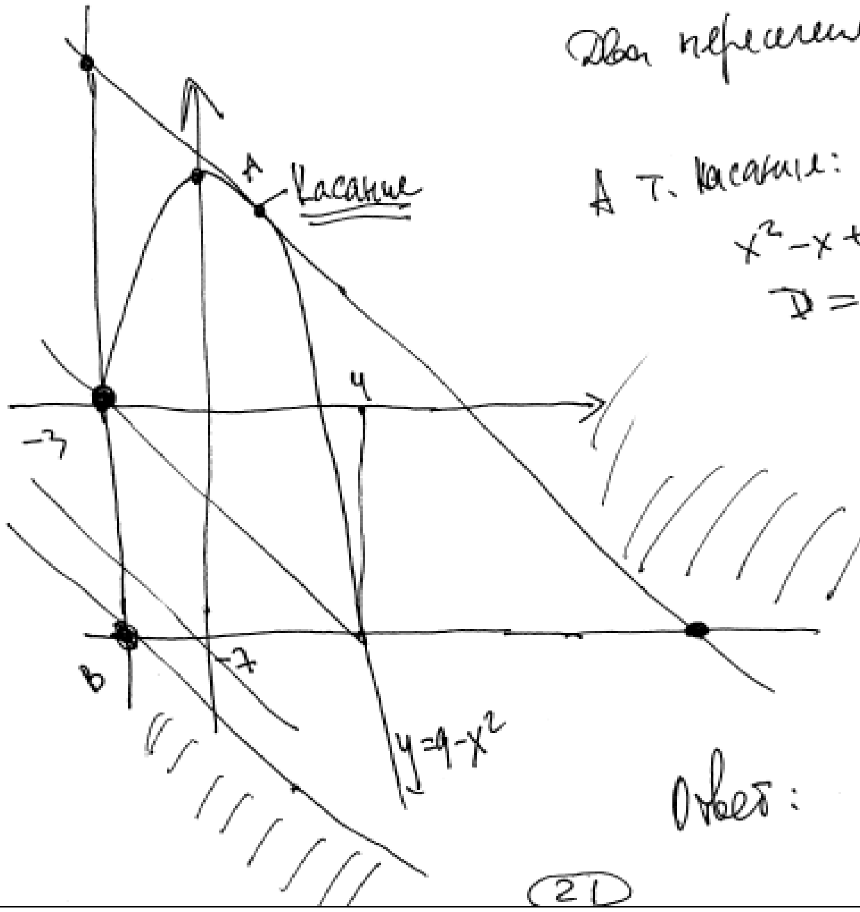
$$D=(x^2-2)^2-4(7x^2-63)$$

$$D=x^4-32x^2+256=(x^2-16)^2$$

$$y_{1,2}=\frac{2-x^2\pm(x^2-16)}{2}$$

$$y_1=-7 \qquad y_2=9-x^2$$

Два пересечения < выше A, ниже B



A т. касания: $y=a-x=9-x^2,\ D=0$

$$x^2-x+(a-9)=0$$

$$D=1-4(a-9)$$

$$D=37-4a=0$$

$$a=\frac{37}{4}$$

$B(-3;-7)$

$a=-3-7=-10$

Ответ: $a \leq -10$ или $a > \frac{37}{4}$

(21)

Комментарий. Деликатный случай. С одной стороны, есть явное и полное понимание ситуации. С другой стороны, в самом начале допущена ошибка с включением прямой $x=-3$ во множество решений. И только из-за этого в дальнейшем был произведен отбор, давший неверный ответ. Более 1 балла поставить нельзя. На 1 балл условие критерия «Задача верно сведена…» не выполнено, и условие «получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения» не выполнено. Всё-таки, ставить 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 3. Система, см. текст, имеет ровно два решения. **Ответ:** $-8 \le a \le \frac{7}{4}$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 \\ y+2=a(x-5) \end{cases}$$

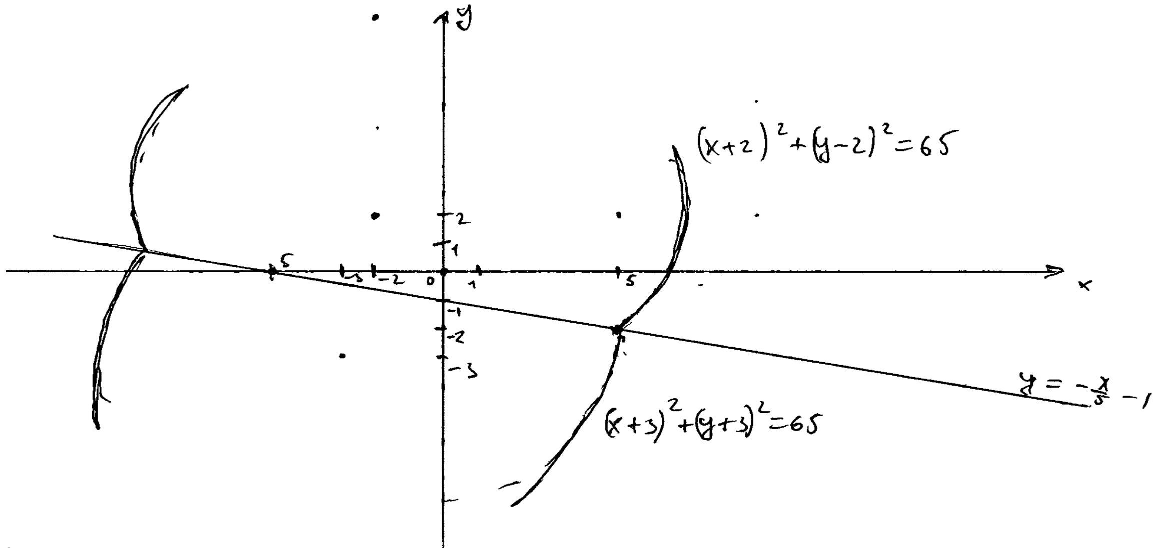
Рассмотрим 2 случая при $x+5y+5 \ge 0$ и при $x+5y+5<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \\ x+5y+5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \\ x+5y+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=65 \\ y \ge -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2=65 \\ y \le -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(x+2)^2+(y-2)^2=\cancel{49}\ 65$ – графиком ф-ии является окр. с центром $(-2;2)$ и $r=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ – графиком ф-ии является окр. с центром $(-3;-3)$ и $r=\sqrt{65}$.

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим $y+2=a(x-5)$.

$y=a(x-5)-2$. – графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку $(5;-2)$. Тогда, для касания окр. $(\{-5;-3\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно -8, а для касания окр$(\{-2;2\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8;\frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty;-8) \cup (\frac{7}{4};+\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8;\frac{7}{4}]$.

Комментарий. Ответ верен, но только нет даже намека на обоснование того, почему для касания a «должно быть равно -8» или «…7/4».

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 4. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $-10 \leq a \leq -3$, $a = 9,25$.

№20 В первом уравнении возьмем члены без x: $y^2-2y-63$.

По т. Виета $y^2-2y-63=(y+7)(y-9)$. А у членов с x тоже выражение $y+7$

$y^2-2y-63=-yx^2-7x^2$; $(y+7)(y-9)=-x^2(y+7)$

$y=a-x=-7$

$x=a+7$

$\boxed{x=16,25}$

$y=a-x=9-x^2$

$x^2-x+(a-9)=0$, $D=1-4(a-9)=0$

$a=37/4$, $a=9,25$

$x_{1,2}=0,5$ два решения ≥ -3

При других a решений будет или $1+2=3$, или $1+0=1$ штук $(D>0, D<0)$

Ответ: $a=9,25$

Комментарий.

Довольно редкий случай, когда в точности по критериям можно поставить 2 балла. О трёх баллах речь в принципе не идет, так как автор практически полностью забыл учесть условие $x \geq -3$ и поэтому отбросил случай $D > 0$.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4|x+3y+1|=9, \\ y+1=a(x-2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-1 \le a \le \frac{1}{7}$**.**

№ 20

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4|x+3y+1|=9 \\ y+1=a(x-2) \end{cases}$$

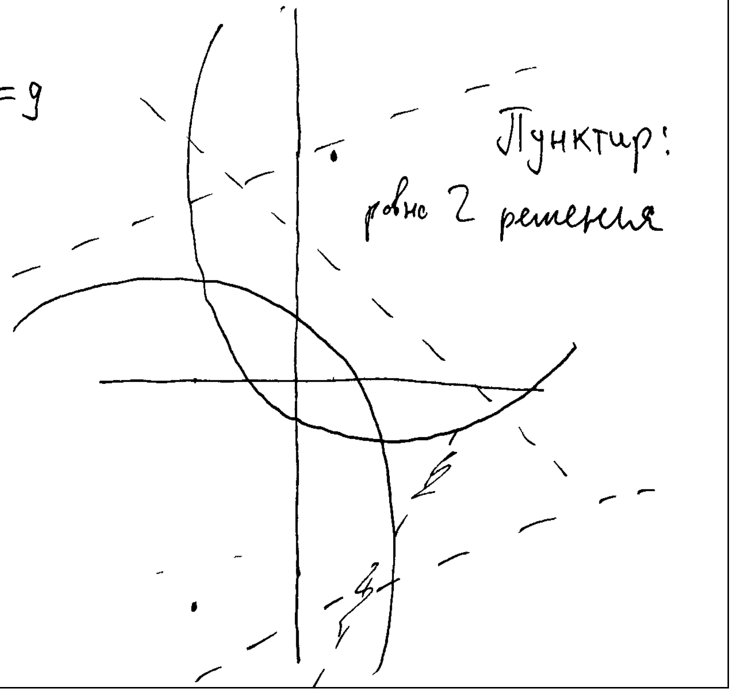
$\{x+3y+1 \geqslant 0$

$(x-1)^2+(y-6)^2=50$

$x+3y+1<0$

$(x+3)^2+(y+6)^2=50$

$y=a(x-2)-1$



Комментарий.

Никакого ответа нет, но работа «не пустая»: верно приведены уравнения окружностей в каждом случае раскрытия модуля (правда, без особых обоснований).

Тем не менее, невозможно считать, что, см. критерии, «Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)». Для этого, как минимум, не хватает пучка прямых, проходящих через точку (2;-1).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4|x+3y+1|=9, \\ y+1=a(x-2) \end{cases}$$ имеет ровно два решения.

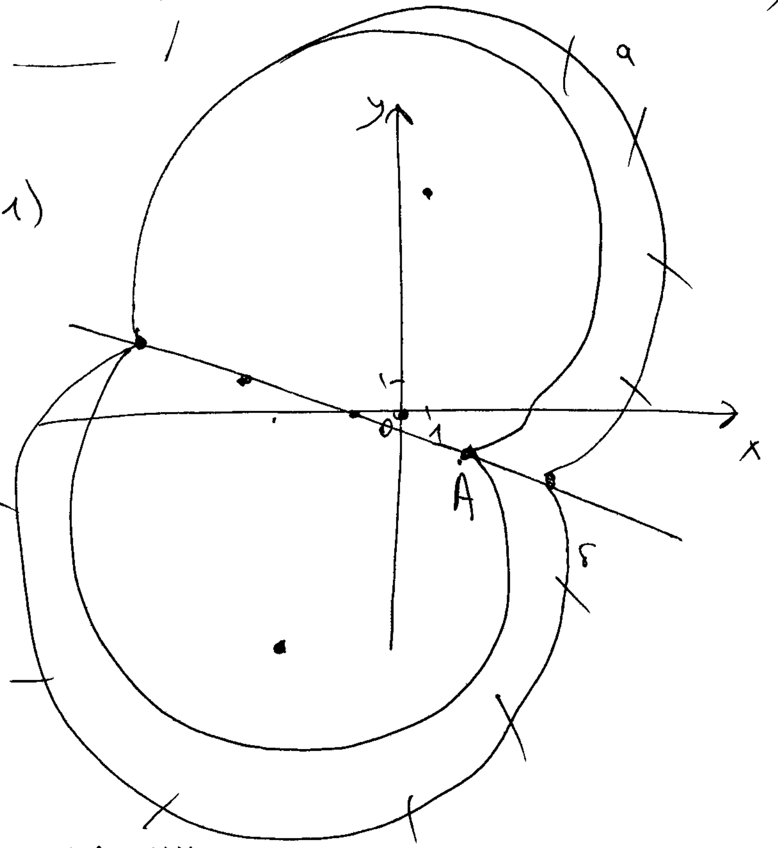
Ответ: $-1 \le a \le \frac{1}{7}$**.**

№20

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2-4|x+3y+1|=9 \quad (1) \\ y+1=a(x-2) \quad (2) \end{cases}$$

(1) а) $\begin{cases} x+3y+1 \geq 0 \\ (x-1)^2+(y-6)^2=50 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+3y+1<0 \\ (x+3)^2+(y+6)^2=50 \end{cases}$



(2) $y=a(x-2)-1$

семейство прямых, проходящих через $A(2;-1)$

$A \in (1)$

$\Rightarrow$ ровно 2 корня, если $y=a(x-2)-1$ совпадает с $x+3y+1=0$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$ Ответ: $-\frac{1}{3}$

Комментарий. По сравнению с предыдущим примером – чистый 1 балл. Оба уравнения системы верно проинтерпретированы геометрически. Правда, вновь очень лаконично. Более ничего практически нет.

Оценка эксперта: 1 балл.

§7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19 (21 в 2015 г., С6 ранее) вариантов КИМ ЕГЭ-2016

Содержательно задание №19 (бывшее 21 и С6) проверяет в первую очередь не уровень математической (школьной) образованности, а уровень математической культуры. Вопрос формирования соответствующей культуры – вещь деликатная и, в целом, формируемая на протяжении нескольких лет.

В то же время, изменения в формате ЕГЭ связаны, в частности, с тем, что это задание по своему тематическому содержанию стало элементарнее, а для его решения, формально, достаточно простейших сведений. По этой причине, например, в ЕГЭ–2015 даже в весьма средней группе с первичным баллом от 11 до 14 положительные баллы за выполнение задания №21 получили 7,2% участников, т.е. оно перестало отпугивать выпускников.

В связи этим хотелось бы подчеркнуть, что никаких фактов из теории чисел типа теоремы Вильсона, чисел Мерсенна, малой теоремы Ферма, теории сравнений и т.п. для решения этих заданий не требуется. Тот, кто эти факты знает, разумеется, может их использовать, но, подчёркиваем, при решении всегда можно обойтись и без них.

Условия задания №19, как и прежних заданий С6, разбиты на пункты. По существу, задача разбита на ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые можно в итоге справится с ситуацией в целом. Как правило, решение п. *а* весьма несложно и использует умение сконструировать некоторый конкретный пример. В соответствии с таким делением условий, критерии, начиная с 2011 года стали более формализованными. Их текст практически никак не использует тематическую или содержательную фабулу конкретной задачи. Такие изменения были предприняты для большей согласованности и унификации выставляемых экспертами оценок.

Ниже процитированы три задачи из материалов ЕГЭ 2014 и 2015 гг., их решения, ответы и критерии проверки, действовавшие на соответствующий год проведения экзамена. Интересно отметить, что в самой ранней задаче 3 еще не было деления на пункты. В задаче 1 в скобках приведены также числовые параметры версии этой же задачи из другого варианта. Далее в Части 1 приведены 6 примеров решений этих задач на ЕГЭ вместе с комментариями по оценке и самими оценками. Подчеркнём, что каждая задача оценивалась по критериям соответствующего года проведения ЕГЭ. В Части 2 также приведены примеры решений этих же задач, но оценки верности этих решений следует проверить самостоятельно. В Части 3 для проведения зачёта выбраны только решения задач 2 и 3 (ЕГЭ-2015) или ихверсий.

Задача 1.

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 (от 1 до 15) включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$? ($\frac{2}{45}$)?

б) Может ли эта разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$? ($\frac{2}{35}$)?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{7}$, $B=\frac{n}{5}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{7}-\frac{n}{5}=\frac{5m-7n}{35}$. Если $A-B=\frac{1}{30}$, то $5m-7n=\frac{35}{30}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{30}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7}-\frac{1+2+4+7+8}{5}=\frac{31}{7}-\frac{22}{5}=\frac{1}{35}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}\le\frac{5x+5z-2\left(\left(x+1\right)+\left(x+2\right)+\ldots+\left(x+5\right)\right)}{35}=$$

$$=\frac{5z-5x-30}{35}\le\frac{5\cdot 10-5\cdot 0-30}{35}=\frac{4}{7}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 разность $A-B$ равна $\frac{4}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{4}{7}$. **Ответ:** а) нет (нет); б) да (да); в) $\frac{4}{7}$ $\left(\frac{8}{7}\right)$.

Содержание критерия, задача №1	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 2.

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение.

а) Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, то есть в 10 раз меньше.

б) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 175(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Так как при перестановке местами цифр числа n равенство $abcd = 175(a+b+c+d)$ остаётся верным, то без ограничения общности можно считать, что в числе n цифры c и d равны 5. Тогда $ab = 7(a+b+10) \geq 7 \cdot 12 > 9 \cdot 9 \geq ab$. Получаем противоречие.

в) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Как и ранее, заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 50(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Без ограничения общности будем считать, что $c = d = 5$. Тогда $ab = 2(a+b+10)$. Так как правая часть последнего равенства делится на 2, то либо a, либо b делится на 2. Будем считать, что на 2 делится b.

Если $b = 2$, то $a = a + 12$, что невозможно.

Если $b = 4$, то $2a = a + 14$; $a = 14$, что невозможно.

Если $b = 6$, то $3a = a + 16$; $2a = 16$; $a = 8$. Число $n = 8655$ и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если $b = 8$, то $4a = a + 18$; $3a = 18$; $a = 6$. Этот вариант также получается из предыдущего перестановкой цифр.

Ответ: а) например, 2529; б) нет; в) Число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Содержание критерия, задача №2	Баллы
Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получены верные ответы в п. *б* и п. *в*	4
Обоснованно получен ответ в п. *в* и один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*	3
Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получен ответ в п. *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в п. *в*	2
Верно построен пример в п. *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в п. *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задача 3.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Решение.

а) Например, для групп $\{2, 3, 16\}$ и $\{6, 8\}$ средние значения равны 7.

б) Допустим, что это возможно. Пусть все средние значения равны c. В каждой группе от 1 до 8 натуральных чисел, поэтому $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. С другой стороны, пусть группы состоят из n, m и k чисел. Тогда суммы чисел в группах равны nc, mc и kc соответственно, а общая сумма всех 10 чисел равна 61 и равна $(n+m+k)c = 10c$. Поэтому $10c = 61$; $c = \frac{61}{10}$. Это противоречит тому, что знаменатель числа c не превосходит 8.

в) Пусть группы состоят из n, m и k чисел, а средние значения равны c_1, c_2 и c_3 соответственно. Если $c_1 < 6{,}1$, $c_2 < 6{,}1$, $c_3 < 6{,}1$, то

$$nc_1 + mc_2 + kc_3 < (n+m+k) \cdot 6{,}1 = 61,$$

что противоречит условию. Значит, хотя бы одно из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше 6,1. Поэтому максимальное из этих чисел не меньше 6,1. При этом каждое из этих чисел имеет вид $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, поэтому максимальное из этих чисел не меньше $6\frac{1}{8}$.

Покажем, что максимальное из этих чисел не может равняться $6\frac{1}{8}$. Пусть $c_1 = 6\frac{1}{8}$. Тогда первая группа состоит из 8 чисел, сумма которых равна $49 = 61 - 12$. Значит, каждая из других двух групп состоит из одного числа, причём сумма двух чисел из второй и третьей групп равна 12. Но тогда одно из этих чисел больше 6, поэтому максимальное среднее не меньше 7. Получаем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше $6\frac{1}{7}$.

Покажем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 может равняться $6\frac{1}{7}$. Это так для групп $\{6\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 16\}$: $c_1 = c_2 = 6$, $c_3 = 6\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

Содержание критерия, задача №3	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Примеры оценивания решений заданий 19

Пример 1.

Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 1 до 15 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{45}$ б) равняться $\frac{2}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

С6. Пусть x – сумма оценок по старой системе, тогда y – сумма оценок по новой системе.

По условию $7 \le x \le 105$, $5 \le y \le 89$; $\frac{x}{7}$ и $\frac{y}{5}$ – средние арифметические.

а). $\frac{x}{7} - \frac{y}{5} = \frac{2}{45}$ $\quad 225x - 315y = 70 \quad |:5 \quad 45x = 7(9y+2)$.

По св-ву делимости $7(9y+2)$ должно оканч. на 5 или 0,
45 не кратно 7, => не кратно всем его произведениям.

не может.

б). $\frac{x}{7} - \frac{y}{5} = \frac{2}{35}$ $\quad \begin{cases} 5x - 7y = 2. \\ 5x = 7y + 2 \end{cases}$ По св-ву делимости $(7y+2)$ должно оканч. на 5 или 0.

При $y = 9$ $\quad \begin{cases} 5x = 7\cdot 9 + 2 \\ 5x = 65 \\ x = 13 \end{cases}$, $x = 13$ и $y = 9$ удовл. условию $7 \le x \le 105$, $5 \le y \le 89$.

=> б) · может.

в). Наиб. возможное значение разности можно получить при x наиб. и y наим. $\frac{x}{7} - \frac{y}{5} = \frac{105}{7} - \frac{5}{5} = \frac{525-35}{35} = \frac{490}{35} = \frac{98}{7} = 14$

Ответ: а). не может; б). может; в). 14.

Комментарий.

В пункте *в* нет ни примера, ни доказательства, а ответ неверен. В пункте *б* ответ верен, но примера достижимости таких значений x и y нет. В пункте *а* ответ верен, верно равенство $45x = 7(9y + 2)$, верно упомянута делимость. Однако, делимость на 7 совершенно не причём! Никакого противоречия нет. Противоречие может быть получено из $45x - 63y = 14$, т. е. из делимости на 9.

Оценка эксперта: 0 баллов.

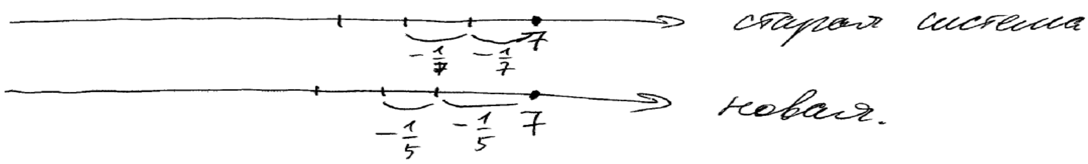
Пример 2.
Условие см. выше с числами 1–10, 1/30, 1/35.

C6 a_i – оценка эксперта

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ (упорядочим оценки в порядке возрастания)

отсюда получаем, что.

$0 \le a_1 \le 4$	~~Самая наивысшая~~
$1 \le a_2 \le 5$	Самая высокая оценка по системе
$2 \le a_3 \le 6$	оценивания равна 7 и ей
$3 \le a_4 \le 7$	соотв. оценки: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$4 \le a_5 \le 8$	Рассмотрим, что происходит
$5 \le a_6 \le 9$	с оценкой рейтинга при изменении в
$6 \le a_7 \le 10$	допустимых ~~пределах~~ границах
	оценок экспертов.



Видно, что шаги для разных систем различны (шаг – изменение рейтинга при изменении оценки одного эксперта на 1), тогда:

$\left|7 - \frac{k}{5} - \left(7 - \frac{n}{7}\right)\right| = \frac{1}{30}$, где k и n – кол-во шагов для новой и старой системы соответственно, k и $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$, $k \ge 0$.

$|5n - 7k| = \frac{7}{6}$,

т.к. $5n - 7k \in \mathbb{Z}$, а $\frac{7}{6} \notin \mathbb{Z}$, то

разность рейтингов не может равняться $\frac{1}{30}$.

с другой стороны, $|5n - 7k| = 1$, то есть $\left|7 - \frac{k}{5} - \left(7 - \frac{n}{7}\right)\right| = \frac{1}{35}$ возможна. при оценках: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10

Ответ: а) нет

б) да, при оценках: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Комментарий.
Ответ в пункте *б* верен, хотя лучше бы не испытывать терпение проверяющего и добавить нужное числовое равенство. В пункте *а* ответ верен, его обоснование довольно экзотично, но верно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 3. Условие см. Пример 1.

С6. Дано:

$\underbrace{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ m}$

7 оценок экспертов.

$a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq f \neq m$

$a, b, c, d, e, f, m \in [1; 15]$.

Можно сказать, что $a < b < c < d < e < f < m$.

а). рейтинг по старой системе

$$\frac{a+b+c+d+e+f+m}{7}$$

рейтинг по новой системе

$$\frac{b+c+d+e+f}{5}.$$

$$\left|\frac{a+b+c+d+e+f+m}{7} - \frac{b+c+d+e+f}{5}\right| = \frac{2}{45}$$

$$\left|\frac{5(a+m)-2(b+c+d+e+f)}{35}\right| = \frac{2}{45}$$

$$|5(a+m)-2(b+c+d+e+f)| = \frac{35 \cdot 2}{45}$$

$$5(a+m)-2(b+c+d+e+f) = \frac{14}{9}$$

$$45(a+m)-14 \neq 18(b+c+d+e+f)$$

Нет таких целых чисел, при вычитании которых получилось бы дробное число.

~~Ответ: нет, нельзя~~

б). рейтинг по старой системе

$$\frac{a+b+c+d+e+f+m}{7}.$$

рейтинг по новой системе.

$$\frac{b+c+d+e+f}{5}$$

$$\left|\frac{a+b+c+d+e+f+m}{7} - \frac{b+c+d+e+f}{5}\right| = \frac{2}{35}$$

$$5(a+m)-2(b+c+d+e+f) = 2$$

$$5(a+m) = 2(b+c+d+e+f+1)$$

Возьмем наибольшее и наименьшее возможные числа: $a = 1$, $m = 15$.

$$5(1+15) = 2(b+c+d+e+f+1)$$

$$40 = b+c+d+e+f+1$$

$b+c+d+e+f=39$

Теперь нужно подбирать такие числа из множества $[2;14]$, чтобы они удовлетворяли условию. (они не были равны и их сумма $=39$)

Например:

$b=3$

$c=6$

$d=9$

$e=10$

$f=11.$

Таким образом, необходимый нам набор:

$a=1,\ b=3,\ c=6,\ d=9,\ e=10,\ f=11,\ m=15$

~~Ответ: мож~~ Ответ: а) нельзя

б) можно. Например:

1, 3, 6, 9, 10, 11, 15.

С6 в) Чтобы ~~разн~~ рейтинг был наибольшим, необходимо, чтобы разница в числителе была наибольшей.

А значит. ~~$(a+m)$ но~~ наименьшим должно быть.

$$\frac{5(a+m)-2(b+c+d+e+f)}{35}.$$

Отсюда a — наименьшее из наименьших

$a=1 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=4 \quad e=5 \quad f=6 \quad m=15.$

$$\frac{5(1+15)-2(2+3+4+5+6)}{35}=\frac{80-40}{35}=\frac{40}{35}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}.$$

Ответ: в) $1\frac{1}{7}$.

Комментарий.

Кристально ясный случай. Приведено доказательство в *а* и приведены два нужных примера в пунктах *б* и *в*. Однако пример в *в* не обеспечивает «точность предыдущей оценки» так как никакой оценки нет, а есть только эвристическое наблюдение об оценке.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 4.

а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 21 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 245 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 19,6 раза больше суммы цифр этого числа.

Ответ: а) например, 2765; б) нет; в) Число 2477 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

21. а) По условию произведение ~~чисел~~ цифр должно быть кратно 21, следовательно одной из четырёх цифр является 7. Одна из оставшихся цифр ~~6~~ должна быть кратна 3. Исходя из этого, можно рассмотреть случай, когда двумя цифрами являются 7 и 3. Составим уравнение: $a+b+10=a\cdot b$, где a и b - два оставшиеся цифры. Проверяя данное условие, через разность двух цифр ($a=b$; $a=b+1$; $a=b+2$; $a=b+3$ ...), я убедился, что случай 3, 7 не подходит.

Рассмотрим случай 6 (кратное трём) и 7:

$a+b+13=2\cdot a\cdot b$ (аналогичное уравнение)

Путём подбора разностей двух цифр находим:

$$\left[\begin{array}{l} a+b+13=2\cdot a\cdot b \\ a=b+3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b+3+b+13=2(b+3)b \\ a=b+3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2b^2+4b-16=0 \\ a=b+3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\frac{-4\pm 12}{4} \\ a=b+3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ a=5 \end{array}\right.$$

Отрицательный корень не подходит по условию. Примером четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 21 раз больше суммы цифр этого числа, является: 6725 Ответ: 6725

21. б) По условию произведение цифр четырёхзначного числа должно быть кратно 245.
Это условие выполняется тогда и только тогда, когда трени из четырёх цифр являются 5; 7 и 7.
Составим уравнение по условию задания:
$19 + a = a$, где a - последняя цифра этого числа
$19 = 0 \Rightarrow$ такое число не существует

Ответ: Число, произведение цифр которого в 245 раз больше суммы цифр этого числа, не существует.
в) По условию произведение цифр четырёхзначного числа должно быть кратно 19,6.
Это условие выполняется тогда и только тогда, когда ~~искомое~~ произведение кратно 98, следовательно двумя ~~тремя~~ из четырёх цифр искомого числа являются 7; 7. ~~А 2~~.
Составим уравнение по условию задания, а последняя цифра кратна двум (2)
~~Ж~~ сначала рассмотрим случай 7; 7 и 2:
$16 + a = 5a$, где a - последняя цифра четырёхзначного числа
$16 = 4a \Leftrightarrow a = 4$, следовательно искомое число состоит из 7; 7; 2; 4.
Уравнения для оставшихся возможных чисел:
(7; 7; 4); $18 + a = 10a \Leftrightarrow a = 2$, то же самое число.
(7; 7; 6); $20 + a = 15a \Leftrightarrow a = \frac{20}{14}$ не подходят дробные числа
(7; 7; 8); $22 + a = 20a \Leftrightarrow a = \frac{22}{19}$, не подходят дробные числа
Разберём возможные цифровые комбинации (Ответ):
2477; 2747; 2774; 4277; 4727; 4772; 7247;
7274; 7427; 7472; 7724; 7742.

Комментарий.
Верное и (слишком) подробное решение. В пункте *а* хватило бы только одного примера, а сейчас там полный перебор всех вариантов. В пункте *б* решение «лучше», чем предложенное автором задачи. В пункте *в* автор несколько рисковал, явно перечисляя все 12 вариантов: если бы он один из них пропустил, то пришлось бы обсуждать оценку в 3 балла.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 5. См. Пример 4.

№21

а) Пусть $a; b; c; d$ - цифры четырехзначн. числа
$a; b; c; d \in Z$, тогда $(a+b+c+d) \in Z$; $(abcd) \in Z$
$a; b; c; d \in [0; 9]$
$a \cdot b \cdot c \cdot d = 21(a+b+c+d)$

$\frac{abcd}{21} = a+b+c+d$, т. к. $(a+b+c+d) \in Z$, то
$abcd \vdots 21$, тогда две цифры в числе будут 3 и 7
пусть $a=3; b=7$ см доп. бланк

$\frac{abcd}{21} = a+b+c+d$, $a=3; b=7$ $\Rightarrow$ $cd = 10+c+d$, $c = \frac{10+d}{d-1}$

подберем все $d \in [0; 9]$, так чтобы
$c \in Z$; $c \in [0; 9]$
$d \neq 0$; $d \neq 1$;

$d=2$, $c=12 \Rightarrow d \neq 2$ $\quad$ $d=3$, $c=6{,}5 \Rightarrow d \neq 3$ $\quad$ $d=4$, $c=\frac{14}{3} \Rightarrow d \neq 4$

$d=5$, $c=\frac{15}{4} \Rightarrow d \neq 5$ $\quad$ $d=6$, $c=\frac{16}{5} \Rightarrow d \neq 6$ $\quad$ $d=7$, $c=\frac{17}{6} \Rightarrow d \neq 7$ $\quad$ $d=8$, $c=\frac{18}{7} \Rightarrow d \neq 8$

$d=9$, $c=\frac{19}{8} \Rightarrow d \neq 9 \Rightarrow$ нет ~~таких~~ других чисел

б) $(a+b+c+d) \cdot 245 = abcd$.
245 делится на 5 и 49, тогда
$abcd \vdots 5$
$abcd \vdots 49$ $\Rightarrow$ в ~~од~~ четырехзн. числе есть цифры 5; 7; 7
пусть $a=b=7$; $d=5$
$a+b+d = 14+5 = 19$
$(19+c) \cdot 245 = 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot c$
$19+c=c$

$0 \cdot c = 19 \Rightarrow$ нет таких чисел,
нет решений для которых выполняется условие.

в) $abcd = 19{,}6\,(a+b+c+d)$

$a+b+c+d = \dfrac{abcd \cdot 10}{196}$

$a+b+c+d = \dfrac{5\,abcd}{98}$

$(a+b+c+d) \in Z \Rightarrow abcd \vdots 98$

$98 = 2\cdot 7\cdot 7$, тогда ~~делители~~ ~~98 = 7; 7; 5~~

цифры в числе $7; 7; 2$.

пусть $a = 2$; $b=7$; $c = 7$

$a+b+c = 16$

$16+d = \dfrac{5\cdot d\cdot 98}{98}$

$4d = 16 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow$

числа удовлетв. условию:

4277; 4772; 4727; 2774; 2747; 2477; 7724; 7742; 7427; 7247

Ответ: а) нет чисел

б) нет чисел

в) 4277; 4727; 4772; 2774; 2477; 2747; 7724; 7742; 7427; 7247.

***Комментарий*.**

Обоснованно получен ответ в п. *б*. Неверно решен п. *а*. П *в*. решен по существу верно, но при перечислении вариантов пропущены два числа. Типичный неприятный случай: формально, по критериям лучше, чем на 1 балл, но несколько хуже, чем на 2 балла. При этом если совсем «простить» перечислительный просчет, то можно говорить и о 3 баллах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 6.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Ответ: а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

Задание 21

а) $\boxed{\text{Да}}$, может быть для групп 1 и 16 и 9 и 8

б) Всего 10 чисел с суммой $1+...+9+16=61$.

$\boxed{\text{Ср.ар} \times \text{кол-во} = \text{сумма}}$

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ Ax+Ay+Az=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10-x-y \\ Ax+Ay+A(10-x-y)=61 \end{cases}$$

$10A=61 \quad A=6{,}1$

Такое ср.ар. может быть для 10 и более чисел, а их в группах меньше. $\boxed{\text{Нет}}$

в) ~~так как~~ в группах ≤ 8 чисел $\Rightarrow$ ср.ар ≤ 6, то сумма ≤ 60

Если все ср.ар ≤ 6, то сумма ≤ 60

$\Downarrow$ есть ср.ар > 6, а $6{,}1$ и $6\frac{1}{7}$ невозможн. $\boxed{\text{Ответ } 6\frac{1}{8}}$

Комментарий.

Скорее всего, автор был близок к верному решению. Но в решении пункта *а* пропустил условие «…из **разного** количества чисел», а в пункте *в* поторопился с ответом, не попытавшись привести пример его реализуемости. Обоснование в *б*, быть может, не идеально, но оно по существу верно.

Оценка эксперта: 1 балл.