Справочник

Планиметрия. Часть 1

Перейдите в режим показа.

Слайды 2,3, 4 - оглавление

Нажмите на интересующий вас материал

Оглавление

Кнопки возврата в оглавление

Кнопки перехода на следующий слайд

Кнопка возврата из оглавления на последний изучаемый слайд

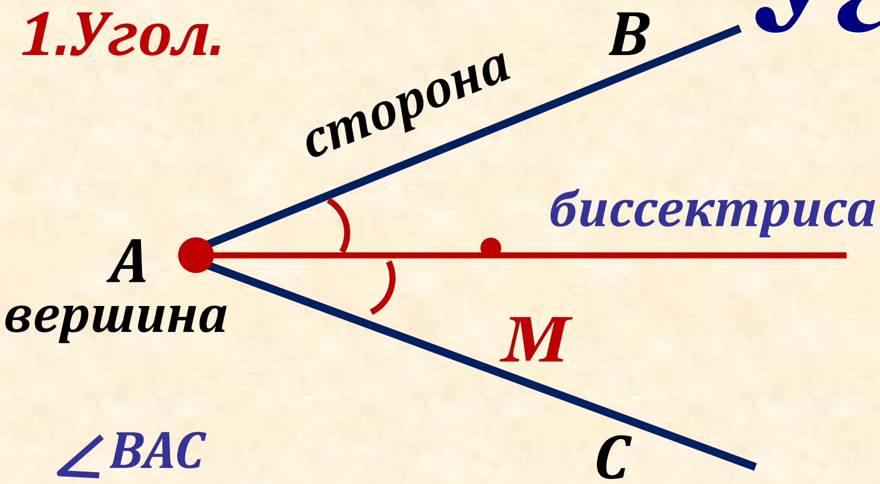
Оглавление

Оглавление

Оглавление

Углы

1.Угол.

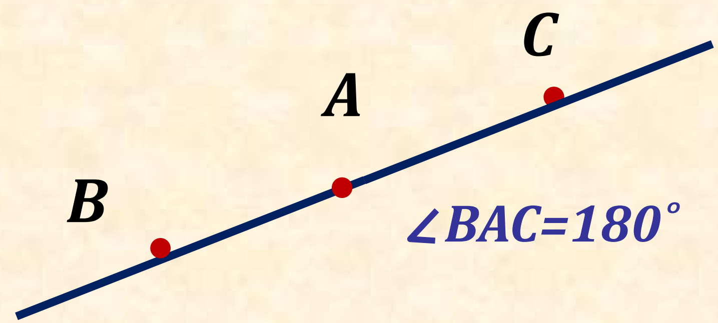


$\angle BAC$

AM - биссектриса

$\angle BAM = \angle CAM$

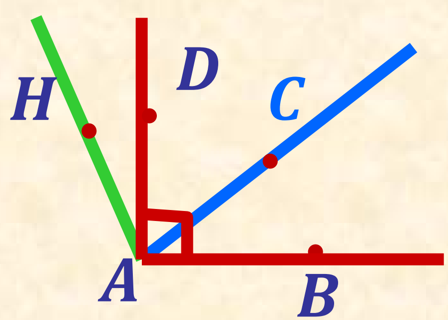
2.Развёрнутый угол.



$\angle BAC = 180^\circ$

Биссектриса делит угол пополам

3.Виды углов.



$\angle BAD = 90^\circ$ - прямой

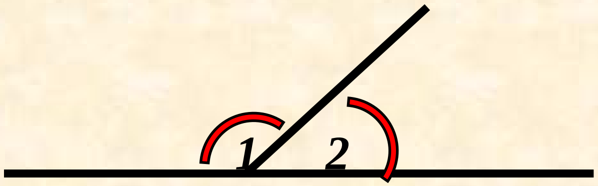
$\angle CAB < 90^\circ$ - острый

$\angle HAB > 90^\circ$ - тупой

Оглавление

Углы

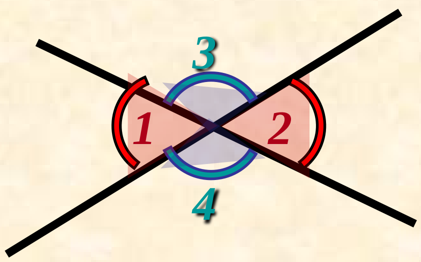
Смежные углы



Сумма смежных углов равна 180º

$\angle 1 + \angle 2 = 180^o$

Вертикальные углы

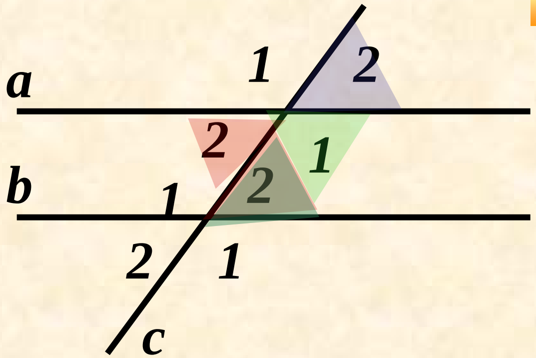


Вертикальные углы равны

$\angle 1 = \angle 2$

Оглавление

Углы при параллельных прямых



При параллельных прямых и секущей

накрест лежащие углы равны

соответственные углы равны

Сумма односторонних углов равна 180º

Признаки параллельности прямых

Прямые параллельны, если

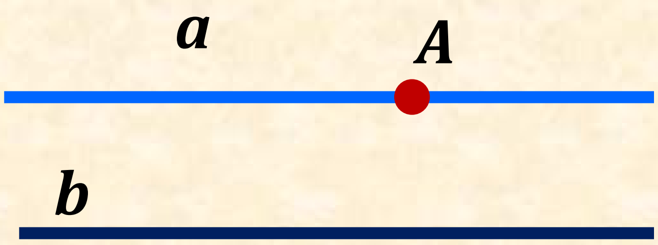
накрест лежащие углы равны

соответственные углы равны

Сумма односторонних углов равна 180º

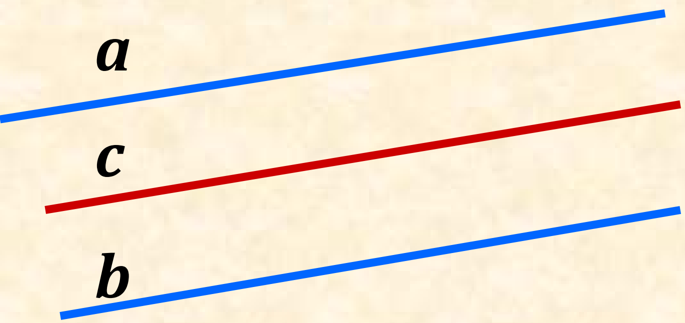
Оглавление

Аксиома параллельных прямых.



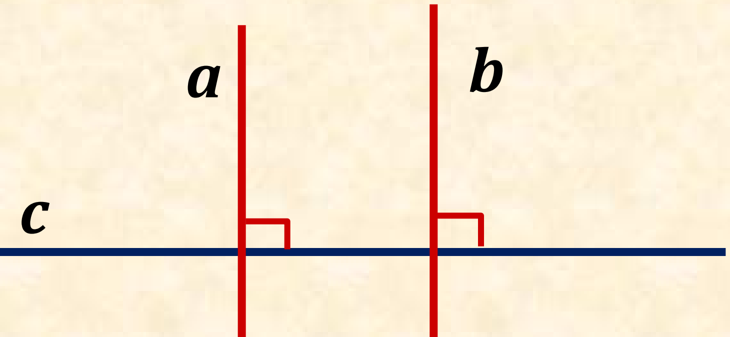
Через точку A, не лежащую на прямой b, в плоскости можно провести прямую a, параллельную данной прямой b, и притом только одну.

Транзитивность параллельных прямых.



Если две различные прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

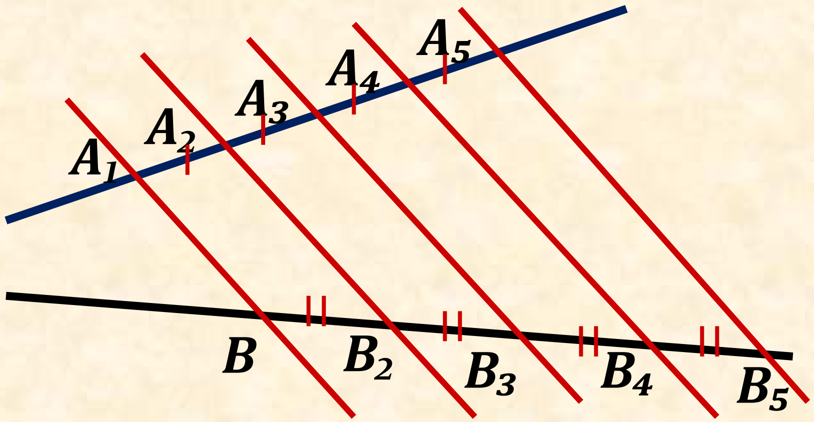
Связь перпендикулярности с параллельностью.



Если две различные прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой.

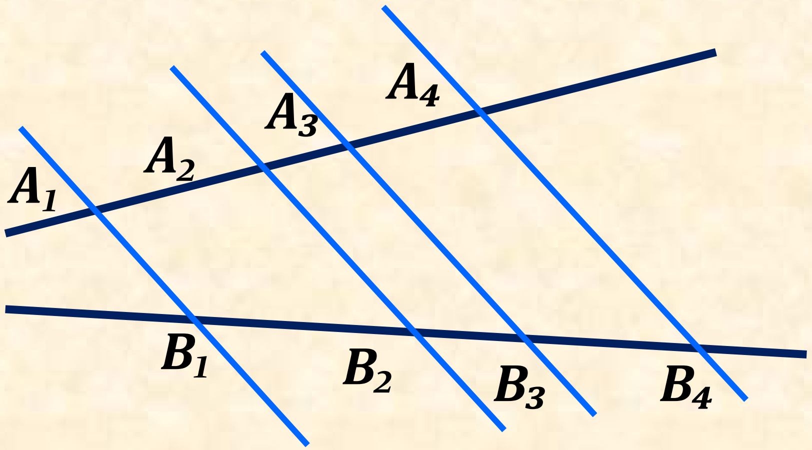
Оглавление

Теорема Фалеса.



Если на одной из двух прямых отложить несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые до пересечения с другой прямой, то и на ней отложатся равные отрезки .

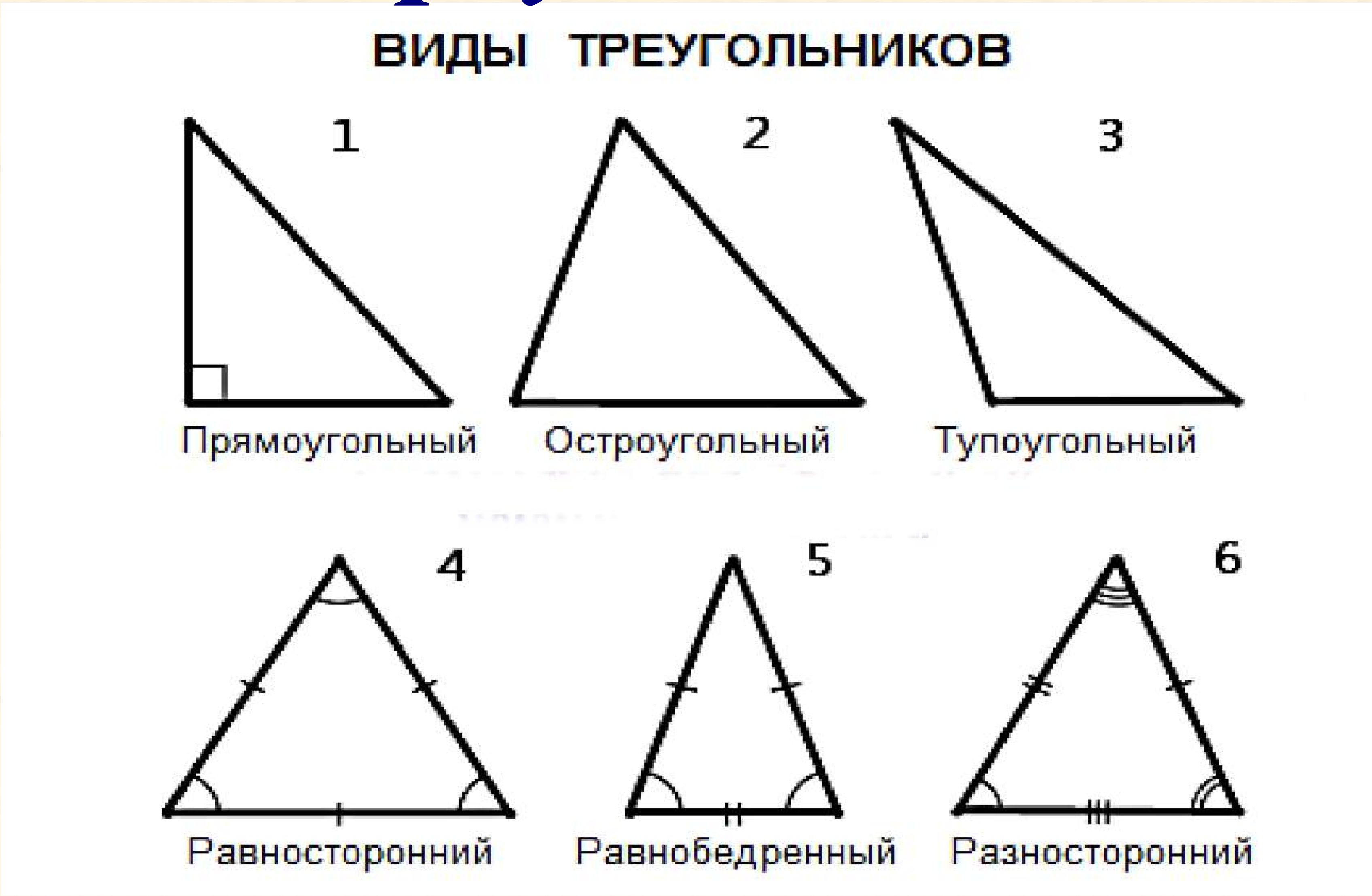
Расширенная теорема Фалеса.



Если на одной из двух прямых отложить несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые до пересечения с другой прямой, то и на ней отложатся отрезки, пропорциональные данным .

Оглавление

Треугольник

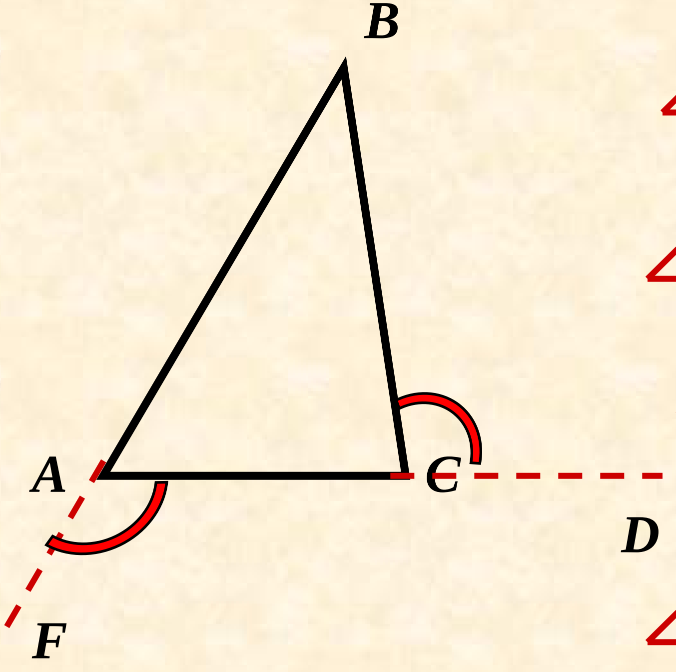


Оглавление

Углы треугольника

Смма углов треугольника равна 180º

Внешний угол треугольника равен сумме двух других углов, не смежных с ним.



$\angle$BCD – внешний угол

$\angle$FAC – внешний угол

$\angle$BCD = $\angle$ BAC + $\angle$ABC

$\angle$FAC = $\angle$ BCA + $\angle$ABC

$\angle$

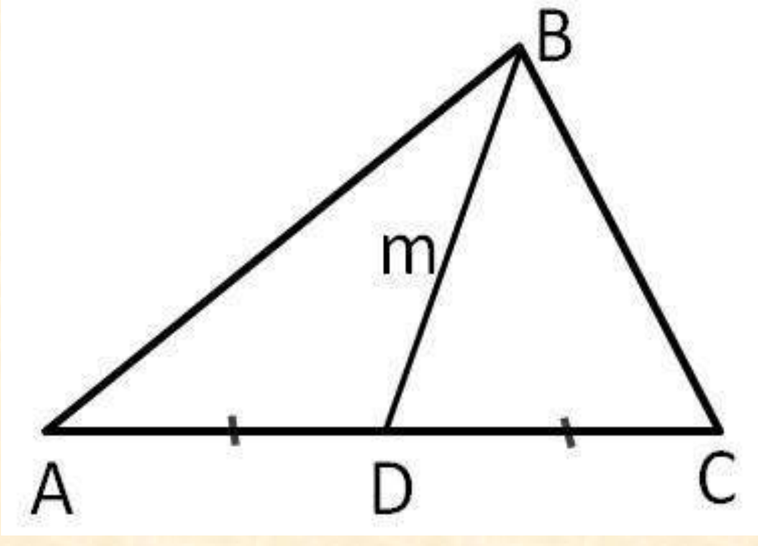
Оглавление

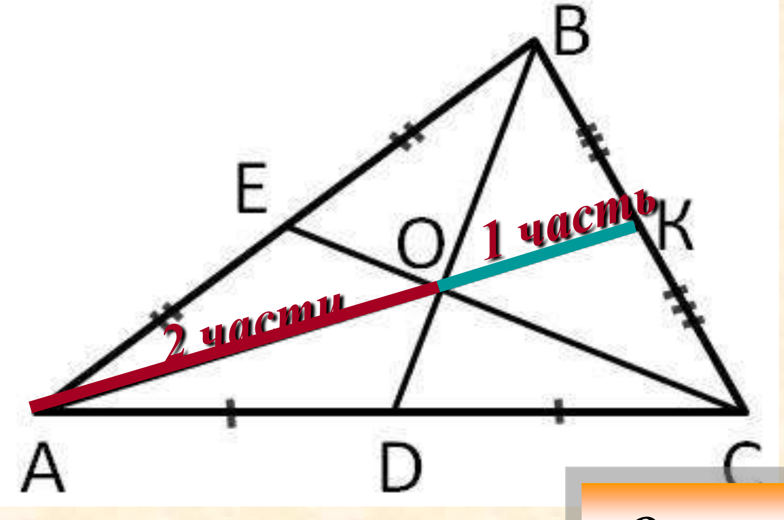
Медиана, биссектриса, высота

Медиана

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину с серединой противолежащей стороны (основанием медианы).

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения делит каждую медиану в отношении 2:1 считая от вершины

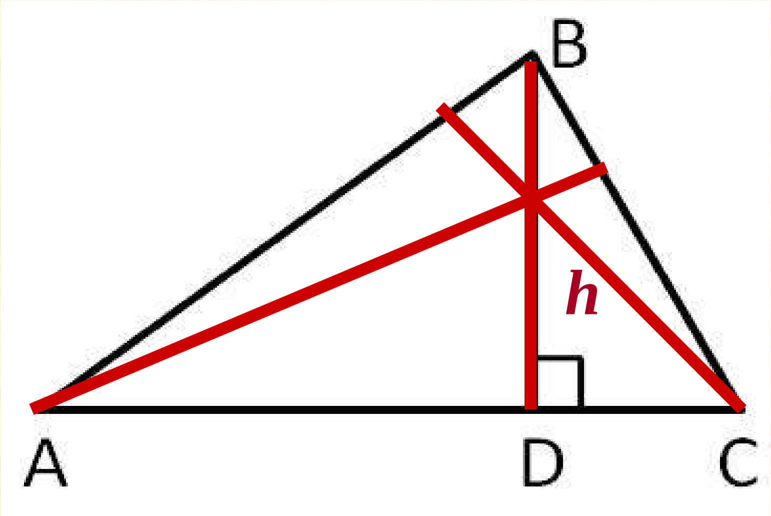


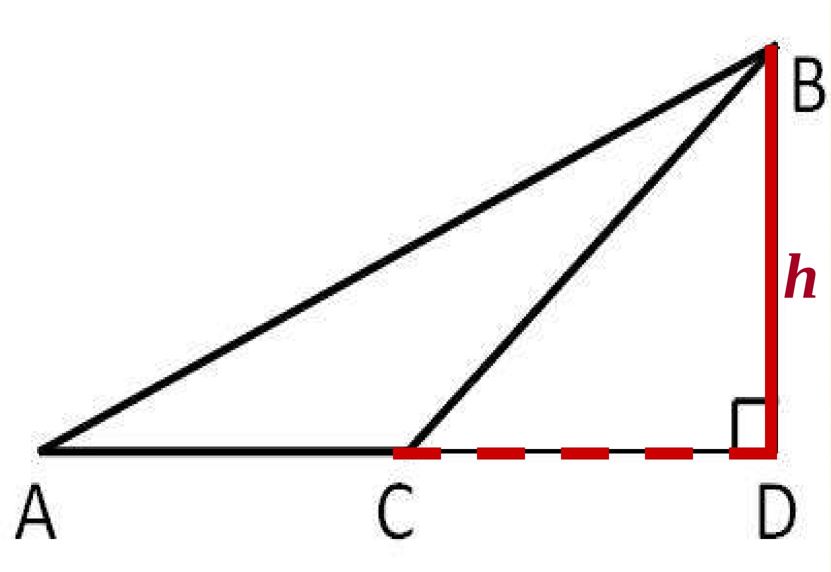


Оглавление

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону или ее продолжение.



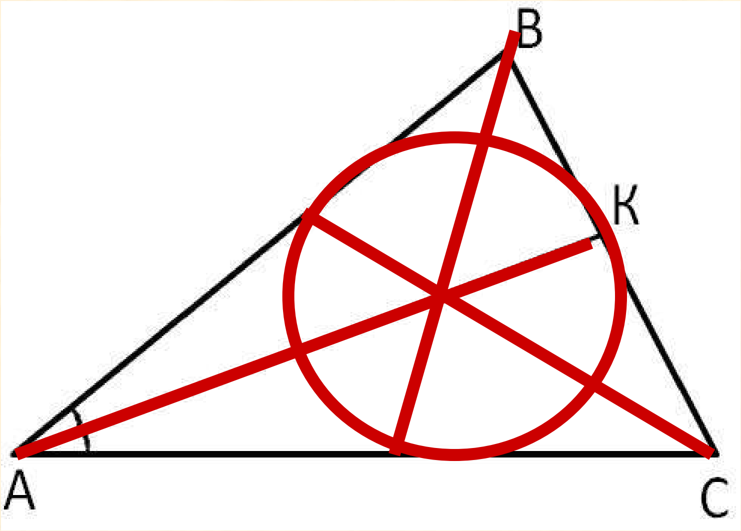


Три высоты треугольника пересекаются в одной точке

Оглавление

Биссектриса

Биссектрисой треугольника называют отрезок, делящий угол при данной вершине пополам.

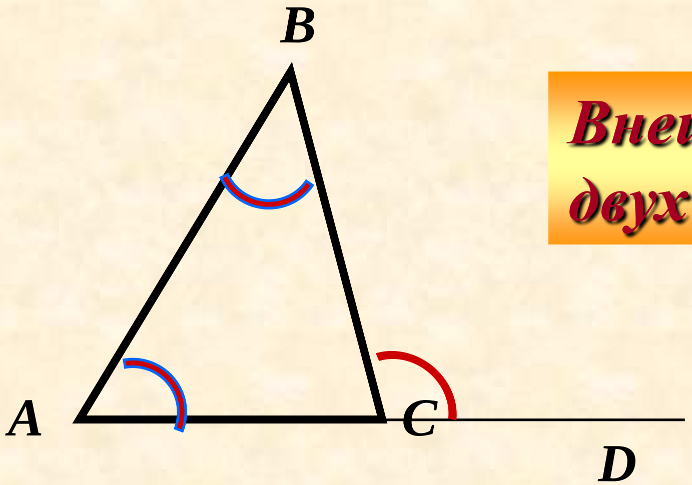


Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка совпадает с центром вписанной окружности.

Оглавление

Углы треугольника

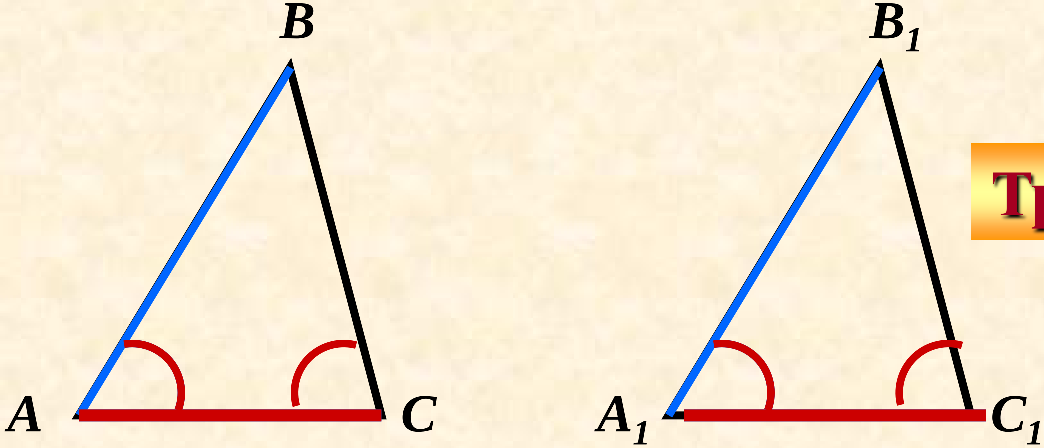
Сумма внутренних углов треугольника равна 180º .



Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним

$$\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$$

Признаки равенства треугольников



Треугольник равны, если:

1. Две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника

По двум сторонам и углу между ними

2. Сторона и два прилежащих угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника

По стороне и двум прилежащим углам

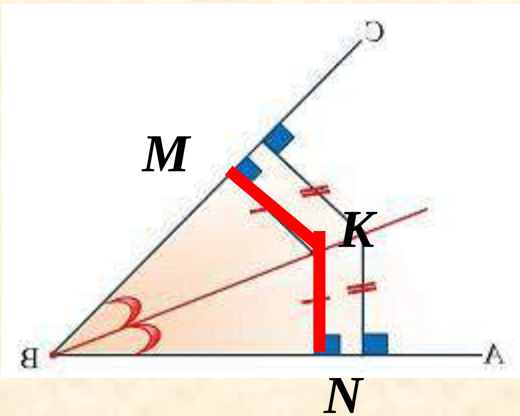
3. Стороны одного треугольника равны сторонам другого треугольника

По трем сторонам

Оглавление

Свойства биссектрисы угла

Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон данного угла.



MK = KN

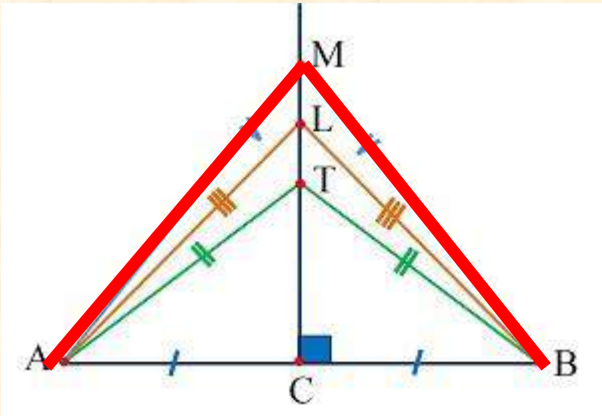
Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

Оглавление

Свойства серединного перпендикуляра

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

Любая точка серединного перпендикуляра, проведённого к отрезку, равноудалена от его концов.

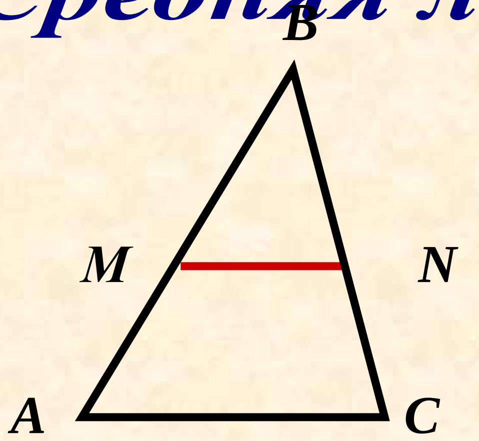


$AM = MB$

Если точка плоскости равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре, проведённом к этому отрезку.

Оглавление

Средняя линия треугольника



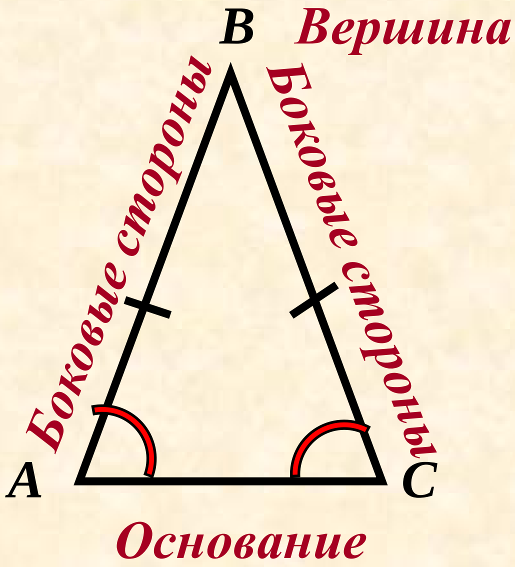
Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией.

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее полусумме

$$MN = \frac{AC}{2}$$

Оглавление

Равнобедренный треугольник



Треугольник, у которого две стороны равны, называется равнобедренным

AB = BC

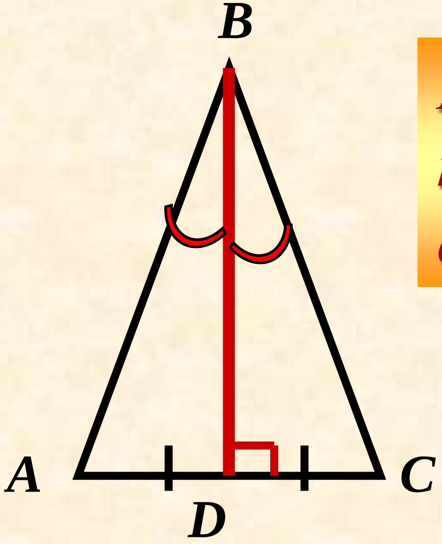
Свойство углов

Углы при основании равнобедренного треугольника равны

$\angle A = \angle C$

Оглавление

Свойство биссектрисы, медианы, высоты



Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

BD- биссектриса; *BD- медиана;* *BD- высота*

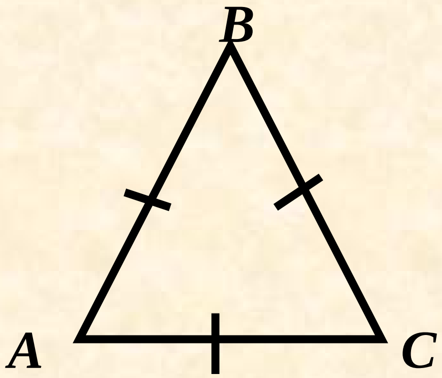
Признаки равнобедренного треугольника

Треугольник равнобедренный, если:

1. Две стороны равны;
2. Два угла равны;
3. Биссектриса является медианой и высотой.

Оглавление

Равносторонний треугольник



Треугольник, у которого стороны равны, называется равносторонним

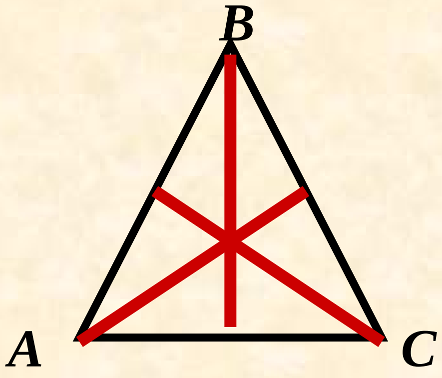
AB = BC = AC

Свойства

Углы у равносторнего треугольника равны по 60^o

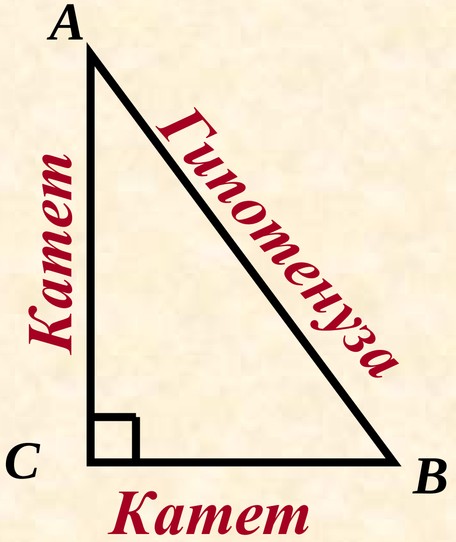
$\angle A = \angle C = \angle B = 60^o$

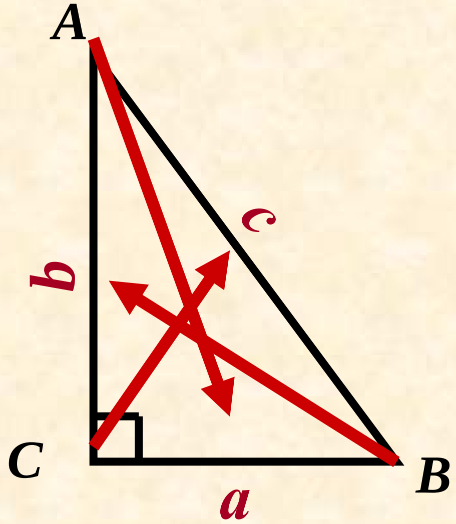
Биссектрисы треугольника являются медианами и высотами.



Оглавление

Прямоугольный треугольник





Острые углы

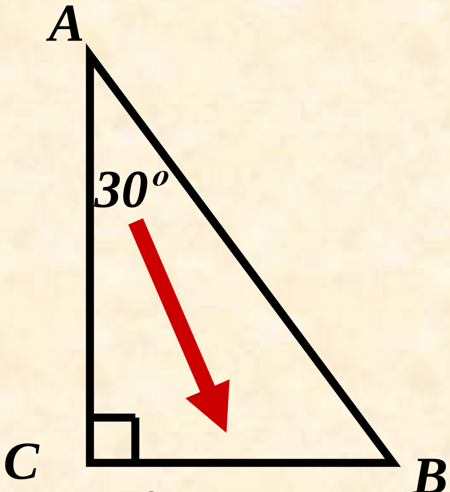
Сумма острых углов прямоугольного $\triangle$ равна 90º

$\angle A + \angle B = 90^o$

$\angle A = 90^o - \angle B$

$\angle B = 90^o - \angle A$

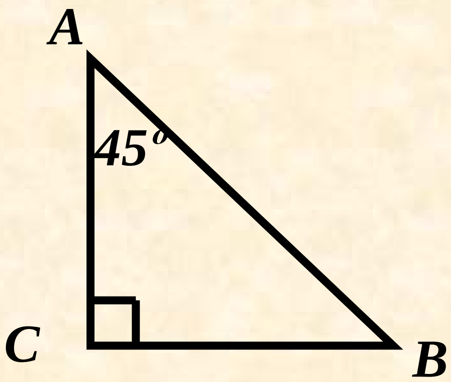
Оглавление



Катет

Катет, лежащий против угла в 30º равен половине гипотенузы.

CB = ½ AB



Прямоугольный треугольник с углом 45º - равнобедренный

$\angle A = \angle B = 45^o$

CB = AC

Оглавление

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как в прямоугольных ∆ есть один равный элемент (прямой угол), то для равенства достаточно двух равных элементов, одним из которых является какая – либо сторона.

Треугольник равны:

1. *По двум катетам*

2. *По катету и гипотенузе*

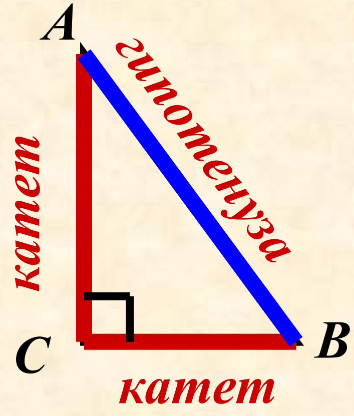
3. *По катету и острому углу*

4. *По гипотенузе и острому углу*

Оглавление

Теорема Пифагора

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$AB^2 = AC^2 + CB^2$ $\quad AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$

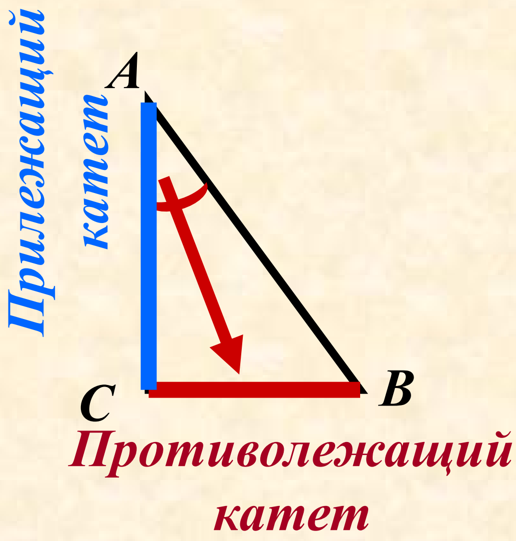
$CB^2 = AB^2 - AC^2$ $\quad CB = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

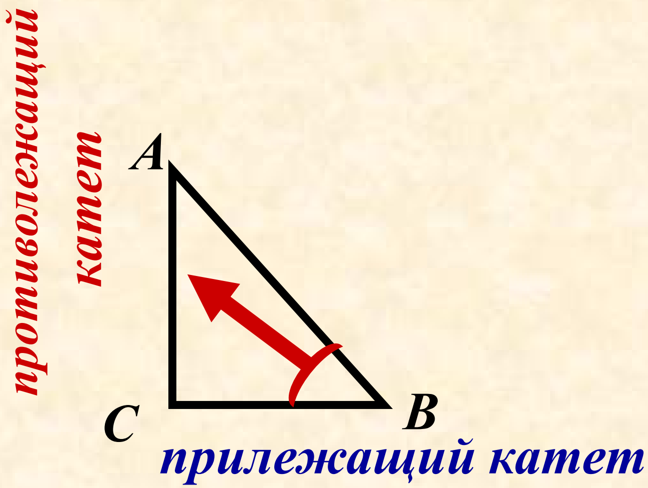
$AC^2 = AB^2 - CB^2$ $\quad AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$

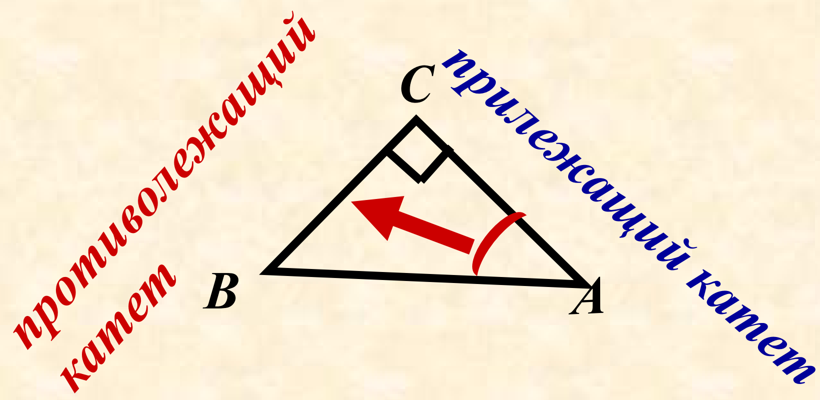
Оглавление

Тригонометрические соотношения

Для одного и того же угла отношения сторон для любых прямоугольных треугольников одинаковы.

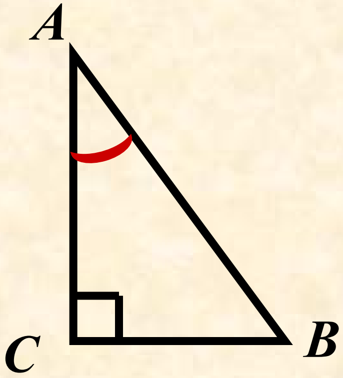






Оглавление

Тригонометрические соотношения



$$\sin A = \frac{\text{Противолеж. катет}}{\text{гипотенуза}}$$ **Синус А**

$$\cos A = \frac{\text{Прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$ **Косинус А**

$$tgA = \frac{\text{Противолеж. катет}}{\text{Прилежащий катет}}$$ **Тангенс А**

$$ctgA = \frac{\text{Прилежащий. катет}}{\text{Противолеж. катет}}$$ **Котангенс А**

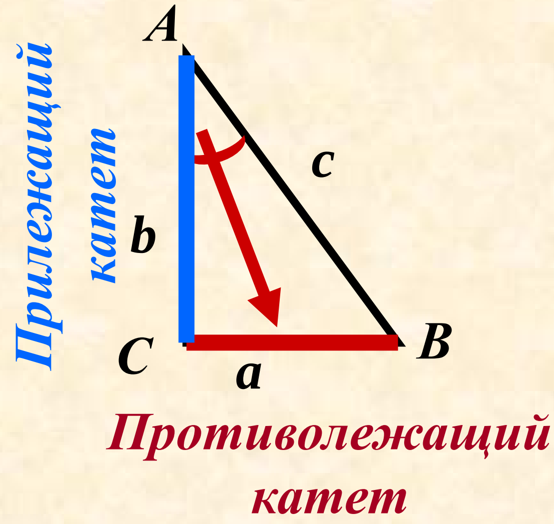
Синус и косинус – отношение катета к гипотенузе

Тангенс и котангенс – отношение катетов

Синус и тангенс – отношение противолежащего катета (в числителе)

Косинус и котангенс – отношение прилежащего катета (в числителе)

Оглавление



Синус

Противолежащий катет к гипотенузе

$$\sin A = \frac{CB}{AB} \qquad \sin A = \frac{a}{c}$$

Косинус

Прилежащий катет к гипотенузе

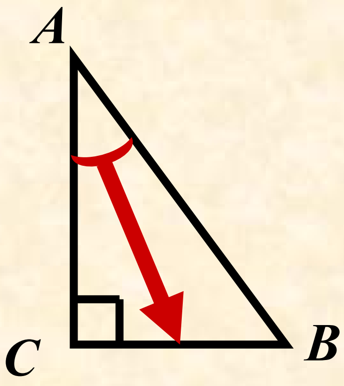
$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

Тангенс

Противолежащий катет к прилежащему

$$tgA = \frac{CB}{AC} \qquad tgA = \frac{a}{b}$$

Оглавление



Дано: CB = 3, AB = 5

Найти sinA, cosA, tgA

Найдем AC по теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} \qquad AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Противолежащий к гипотенузе

$$\sin A = \frac{CB}{AB} \qquad \sin A = \frac{3}{5}$$

Прилежащий к гипотенузе

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \cos A = \frac{4}{5}$$

Противолежащий к прилежащему

$$tgA = \frac{CB}{AC} \qquad tgA = \frac{3}{4}$$

Оглавление

Значения тригонометрических функций

Табличные значения

	30º	45º	60º
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ряд синуса

30º	45º	60º
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}$

Один, два, три

Запомни

Для косинуса поменяйте крайние значения

30º	45º	60º
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ряд тангенса

30º	45º	60º
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Для котангенса поменяйте крайние значения

30º	45º	60º
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Решение прямоугольных треугольников

АЛГОРИТМ 1

Известен угол

1. Отметить данный угол;

2. Проговорить, что известно;

3. Проговорить, что надо найти;

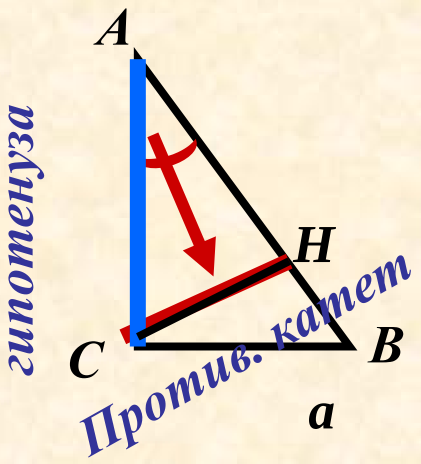
4. Выбрать соответствующее соотношение;

5. Подставить известные величины;

6. Найти неизвестное.

Оглавление

Решение прямоугольных треугольников



Дано:
$\angle A = 60^o$;
$AC = 15\sqrt{3}$
CH - высота
Найти: CH

∆ CAH - прямоугольный

Известно: гипотенуза

Найти: противолежащий катет

Используем синус

$$\sin A = \frac{CH}{AC} \qquad \sin 60^\circ = \frac{x}{15\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15\sqrt{3}}$$

$$x = 22{,}5$$

1. Отметить данный угол;

2. Проговорить, что известно;

3. Проговорить, что надо найти;

4. Выбрать соответствующее соотношение;

5. Подставить известные величины;

6. Найти неизвестное.

Оглавление

Решение прямоугольных треугольников

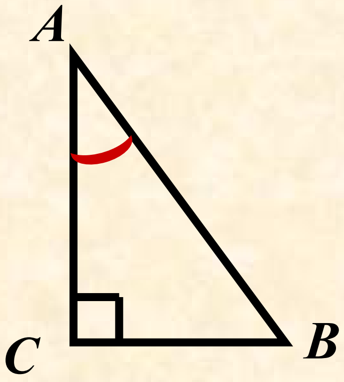
АЛГОРИТМ 2

Известно соотношение. Найти сторону

1. По рисунку записать соответствующее отношение сторон;

2. Подставить известные величины;

3. Найти неизвестное.



Дано:
AB = 39
cosB = 5/13
Найти: CA

$$\cos B = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{AC}{39}$$

$$AC = \frac{5 \cdot 39}{13} = 15$$

Оглавление

Решение прямоугольных треугольников

АЛГОРИТМ 3

Известно соотношение. Найти другие

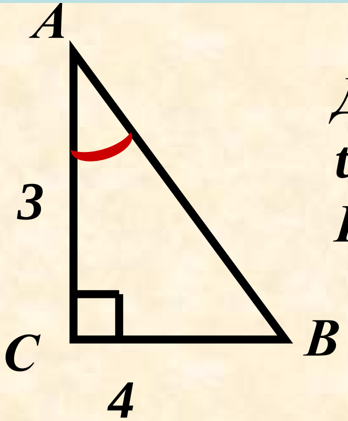
1. Отметить данный угол;

2. По данному соотношению на рисунке записать значения;

3. По теореме Пифагора определить третью сторону;.

4. Найти требуемые соотношения.

При необходимости определить знак функции в зависимости от четверти.

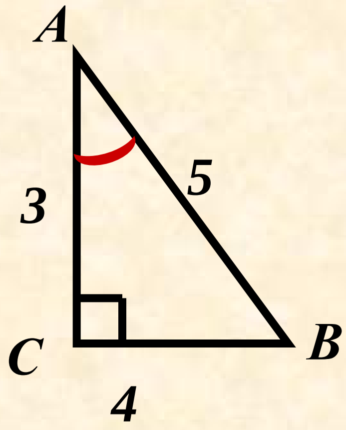


Дано:
tg$A$ = 4/3
Найти: sinB

AB = 5 – треугольник египетский

$$\sin B = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Оглавление



Дано:
tgα = 4/3, α € (π/2; 2π]
Найти: sinB

AB = 5 – треугольник египетский

$$\sin B = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Так как α может находится 2, 3, 4, четвертях, а тангенс положительный, то угол находится в 3 четверти.

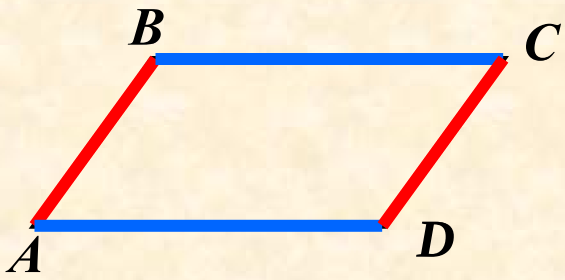
Синус в 3 четверти отрицательный.

Ответ: - 0,8

Оглавление

Четырехугольник

Параллелограмм



Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны

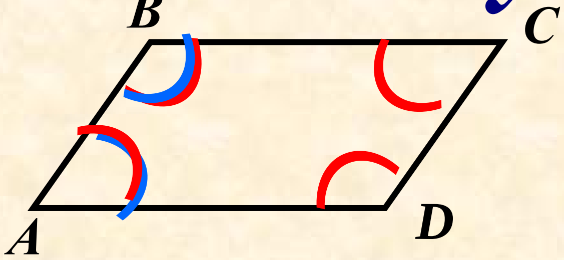
$AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

Оглавление

Свойства параллелограмма

Свойства углов



$\angle A, \angle C$

$\angle B, \angle D$

Противолежащие углы

$\angle A, \angle B$

$\angle B, \angle C$

$\angle C, \angle D$

$\angle D, \angle A$

Прилежащие углы

Противоположные углы параллелограмма равны

$\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$

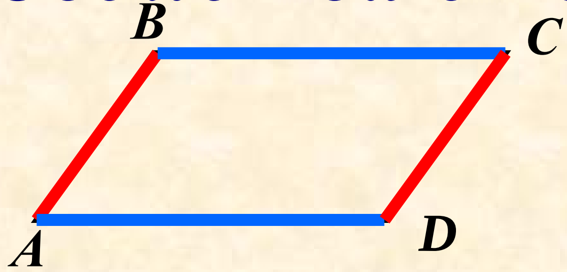
Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне равна 180º

$\angle A + \angle B = 180^o$

Оглавление

Свойства параллелограмма

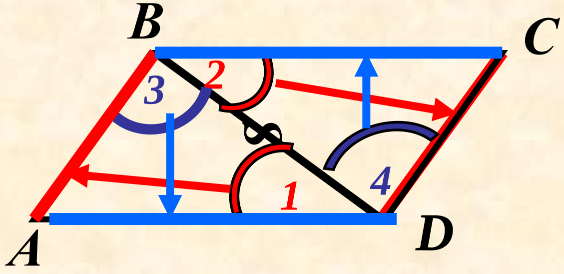
Свойства сторон



AB , CD

BC , AD

Противолежащие стороны



Дано:

ABCD - параллелограмм

Доказать: *AB = CD, BC = AD*

Рассмотрим ∆ABD и ∆BCD

BD - общая

∠1 = ∠2, как накрест лежащие углы при BC || AD и секущей BD

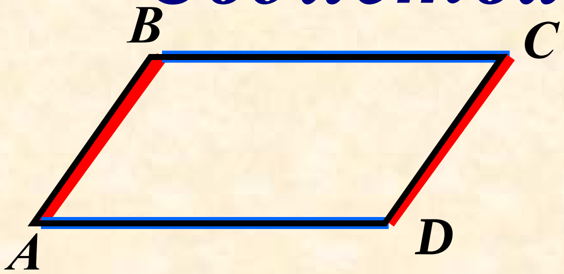
∠3 = ∠4, как накрест лежащие углы при AB || CD и секущей BD

∆ABD = ∆BCD по 2-му признаку равенства тр-ков.

AB = CD, BC = AD, как соответственные стороны в равных тр-ках

Оглавление

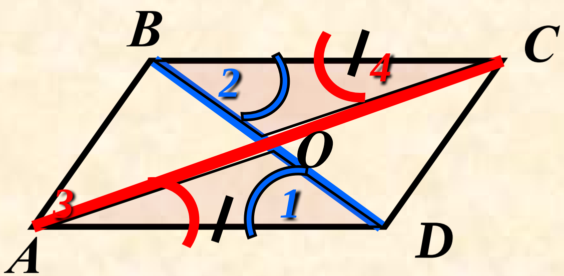
Свойства сторон



Противоположные стороны параллелограмма равны

AB = CD   BC = AD

Свойство диагоналей



Дано:

ABCD - параллелограмм

Доказать: AO = OC, BO = OD

Рассмотрим ΔAOD и ΔBOC   BC = AD как противоположные стороны параллелограмма

$\angle 1 = \angle 2$, как накрест лежащие углы при BC || AD и секущей BD

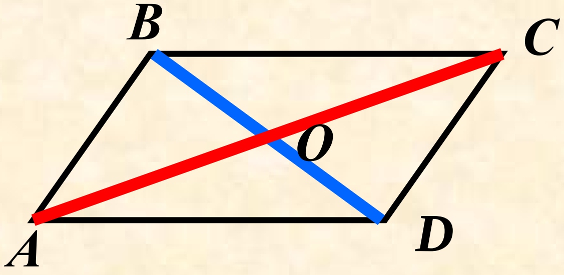
$\angle 3 = \angle 4$, как накрест лежащие углы при BC || AD и секущей AC

ΔAOD = ΔBOC по 2-му признаку равенства тр-ков

Оглавление

AO = OC, BO = OD , как соответственные стороны в равных тр-ках

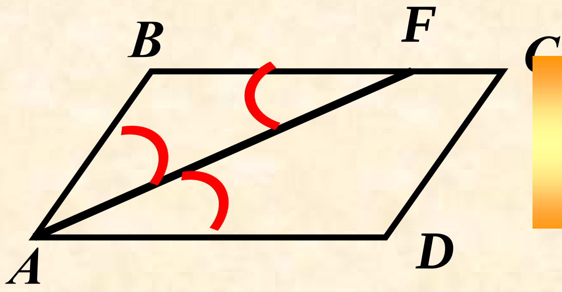
Свойство диагоналей



Диагонали параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам

$BO = OD$ $AO = OC$

Свойство биссектрисы угла



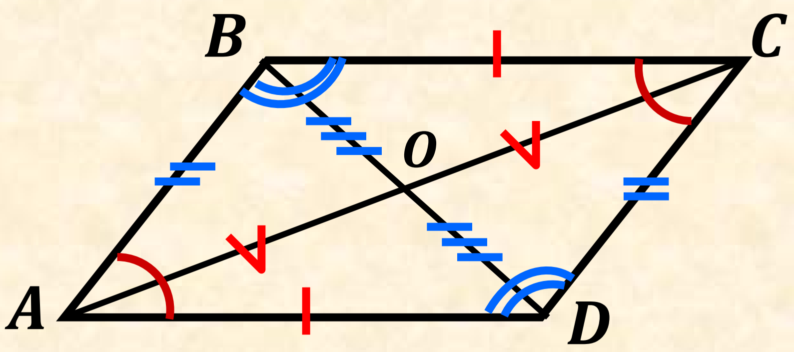
Биссектриса угла параллелограмма отсекает равнобедренный треугольник

ΔABF - равнобедренный

$AB = BF$

Оглавление

Свойства параллелограмма



1.Противоположные углы равны.

2.Односторонние углы в сумме составляют 180˚.

3.Противоположные стороны равны.

4.Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам .

Оглавление

Признаки параллелограмма

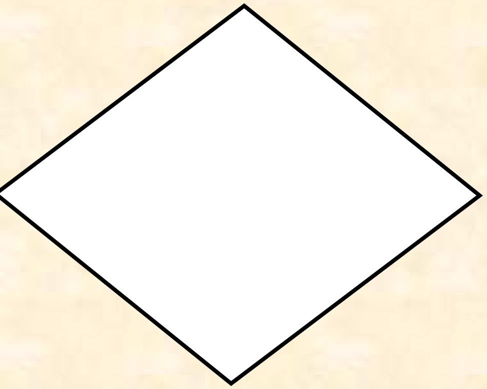
1. Если в четырёхугольнике **две противоположные стороны равны и параллельны**, то этот четырёхугольник - параллелограмм.

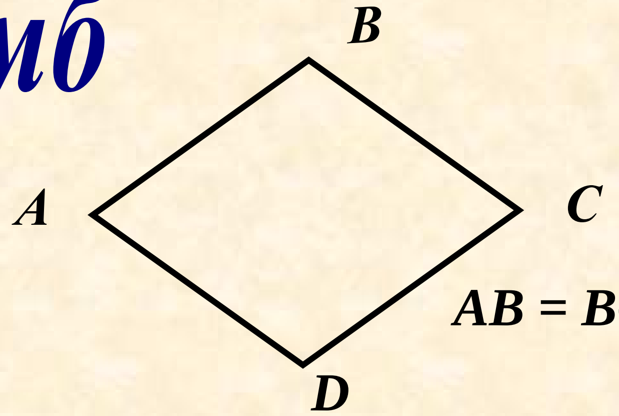
2. Если в четырёхугольнике **противоположные стороны попарно равны,** то этот четырёхугольник - параллелограмм.

3. Если в четырёхугольнике **диагонали точкой пересечения делятся пополам**, то этот четырёхугольник - параллелограмм.

Оглавление

Ромб



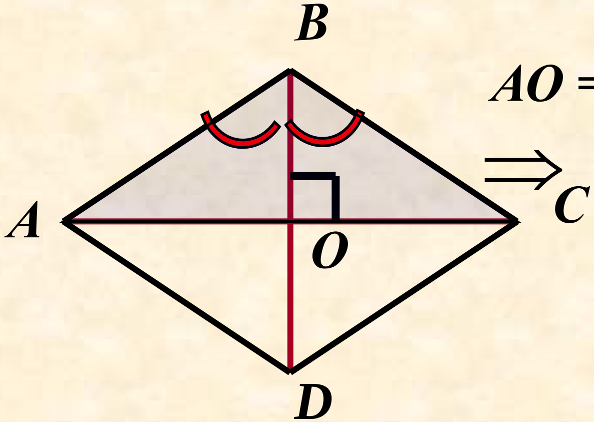


AB = BC = CD = DA

Ромб – это** параллелограмм, **у которого все стороны равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма!

Свойства диагоналей ромба



Δ *ABC – равнобедренный, т.к. AB = BC*

AO = OC по свойству диагоналей параллелограмма.

$\Rightarrow$ *BO – медиана, а значит высота и биссектриса.*

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

$BD \perp AC$

Диагонали ромба являются биссектрисами углов.

$\angle ABO = \angle CBO$

Оглавление

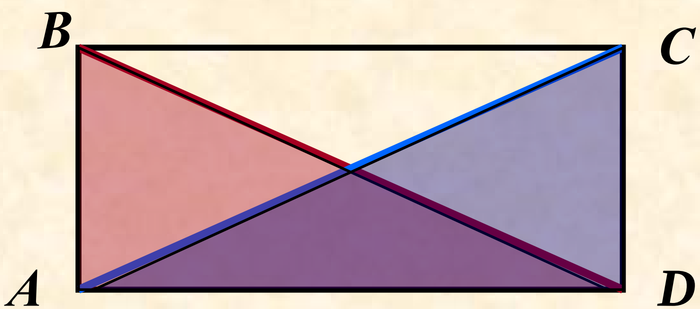
Прямоугольник

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы равны 90°.

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма!

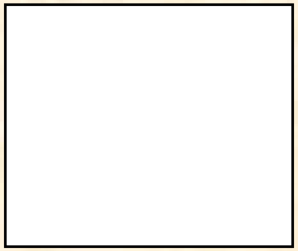
Свойства диагоналей прямоугольника

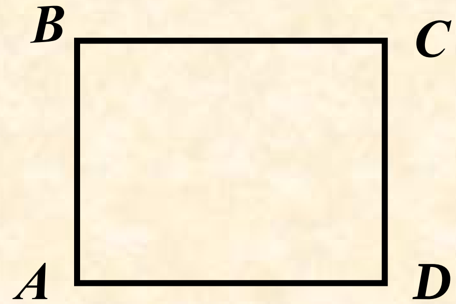


Диагонали прямоугольника равны

Оглавление

Квадрат





Квадрат – это параллелограмм, у которого все стороны равны и углы равны 90°.

AB = BC = CD = DA $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

AB = BC = CD = DA

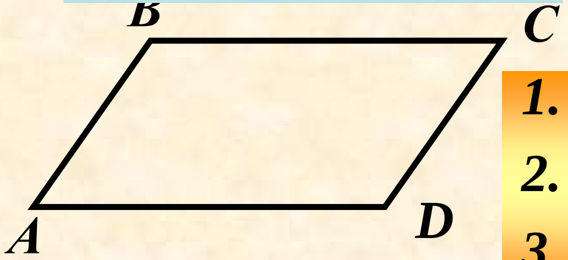
Квадрат – это ромб, у которого все углы равны 90°.

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

Оглавление

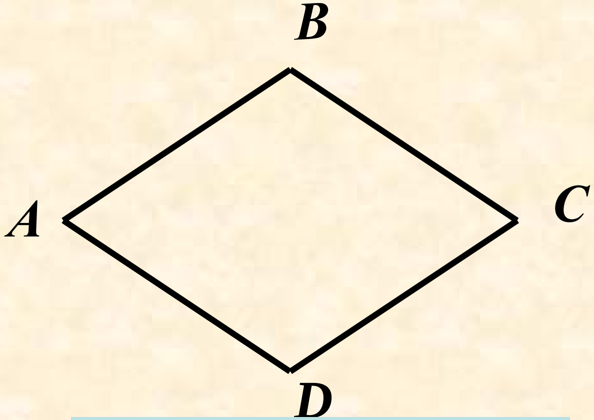
Свойства квадрата

Параллелограмм



1. Свойства углов;
2. Свойства сторон;
3. Свойства диагоналей

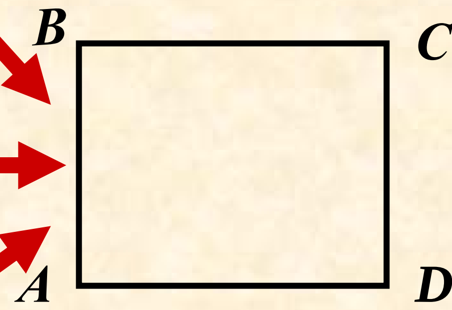
Ромб



Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами

Прямоугольник

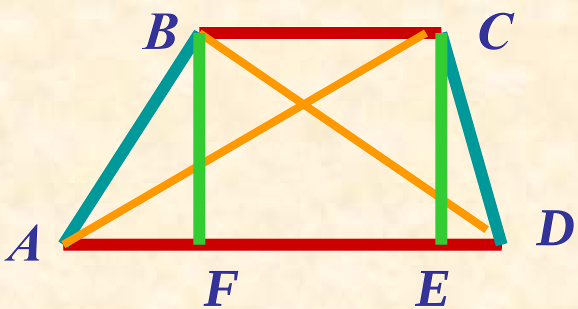
Диагонали прямоугольника равны



Оглавление

Трапеция

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет, называется трапеция



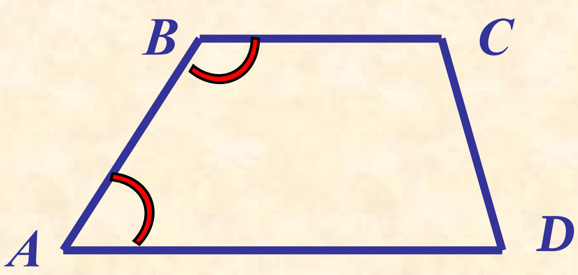
BC и AD – *основания*

AB и CD – *боковые стороны*

BD и AC – *диагонали*

BF - *высота* (AD $\perp$ BF BC $\perp$ BF)

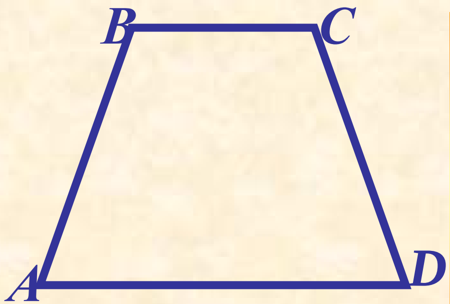
Свойства углов трапеции



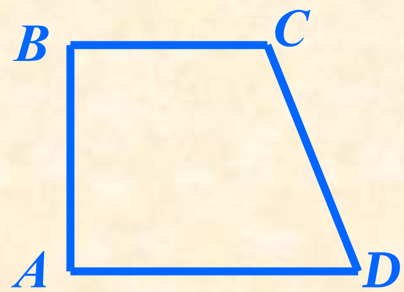
Сумма углов, прилежащих к боковой стороне равна 180°

Оглавление

Виды трапеций



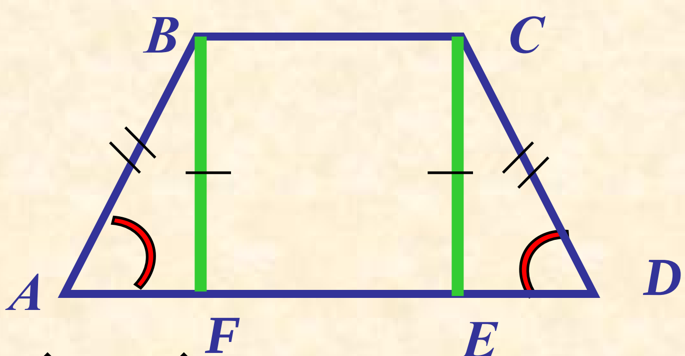
Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобедренной или равнобокой.**



Трапеция, у которой боковая сторона ⊥ основаниям называется **прямоугольной**

Свойства равнобедренной трапеции

1. Свойства углов



Проведем высоты из B и C

ΔABF и ΔCDE - прямоугольные

$\Delta ABF = \Delta CDE$ по катету и гипотенузе

BF = CF, как высоты

AB = CD, как боковые стороны

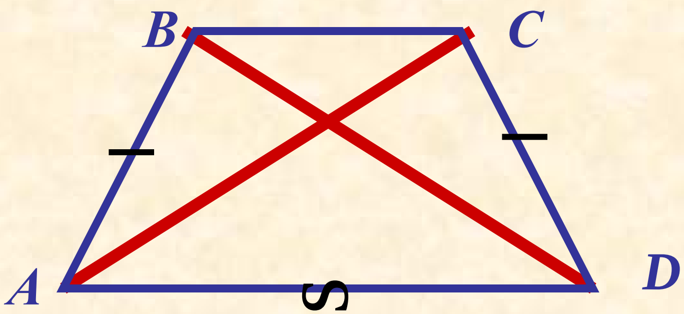
$\angle A = \angle D$, как соответственные углы в равных треугольниках

Углы при основаниях равнобедренной трапеции равны

Высоты проведенные из вершин отсекают равные

Оглавление

2. Свойства диагоналей



∆ABD = ∆CDA по 1-му признаку

AB = CD, как боковые стороны

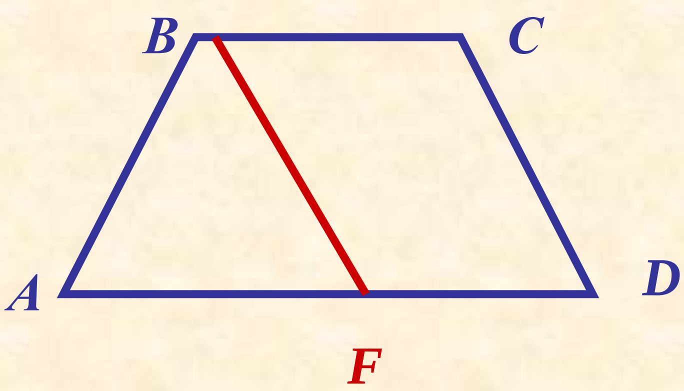
AD – общая

∠A =∠ D

Следовательно, BD = AC, как соответственные углы в равных треугольниках

Диагонали равнобедренной трапеции равны

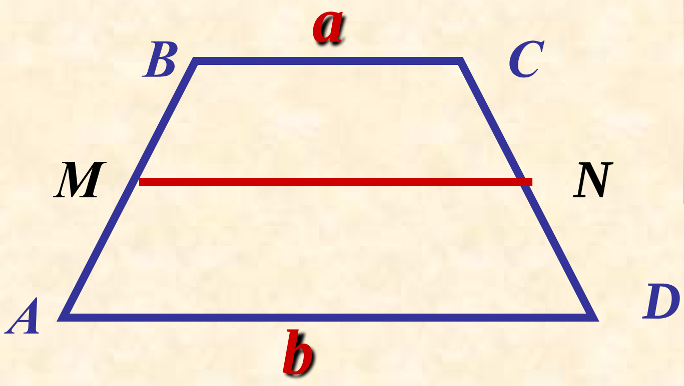
3. Свойство биссектрисы угла



Биссектриса тупого угла отсекает равнобедренный треугольник

Оглавление

3. Средняя линия



Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется средней линией.

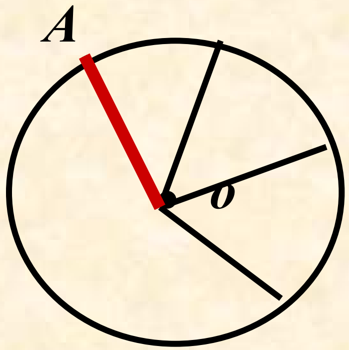
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

$$MN = \frac{a + b}{2}$$

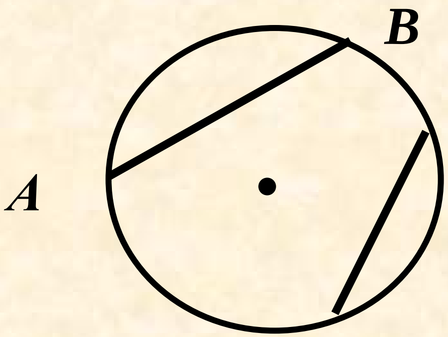
Оглавление

Окружность



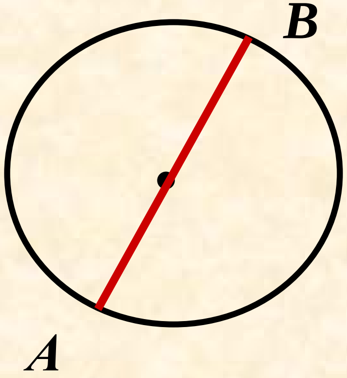
Окружность – линия, все точки которой равноудалены от **центра**

ОА - радиус R



AB - хорда

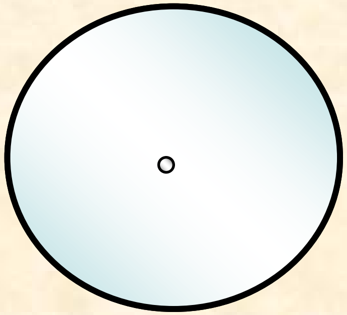
Хорда - отрезок, соединяющий две точки окружности



Хорда, проходящая через центр называется **диаметром** d

$AB = 2R \quad d = 2R$

Оглавление



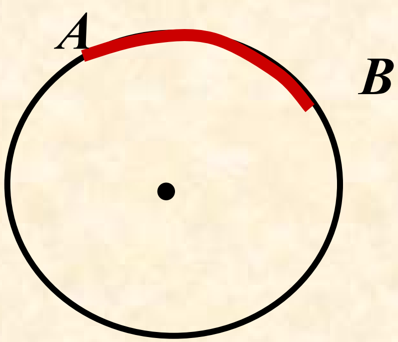
Окружность – это линия

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью

Окружность – это линия поэтому имеет определенную длину

В окружности 360°

Часть окружности называется дугой



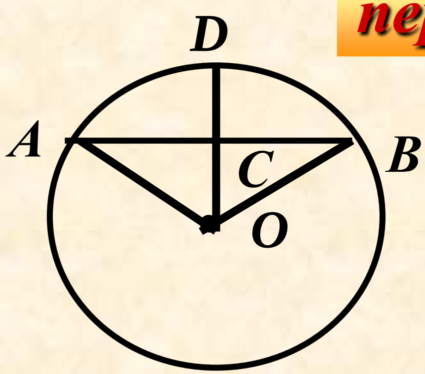
$\smile$ AB - дуга AB

Дуга может измеряться в единицах длины и градусах

Оглавление

Свойство радиуса, проведенного к хорде

Радиус, проведенный к середине хорды, перпендикулярен этой хорде



Дано:

AB- хорда. OD - радиус
AC = CB

Доказать. $OD \perp AB$

Для доказательства провести радиусы в концы хорды;

Установить вид треугольника. Использовать свойства треугольника

ΔABO– равнобедренный

OA = OB = R OC - медиана

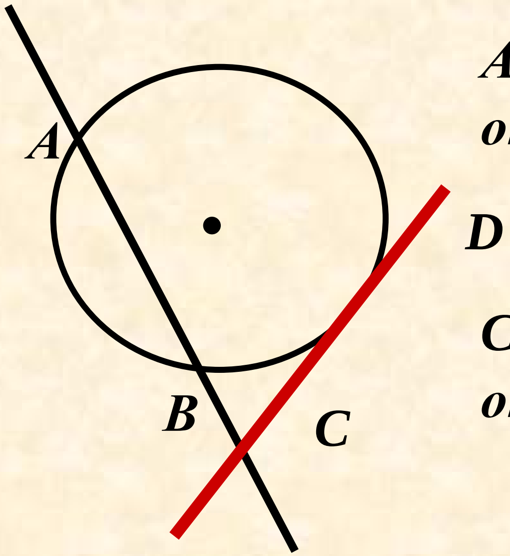
следовательно, $OC \perp AB$, OC - высота

следовательно, $OD \perp AB$

Радиус, проведенный перпендикулярно хорде, делит ее пополам

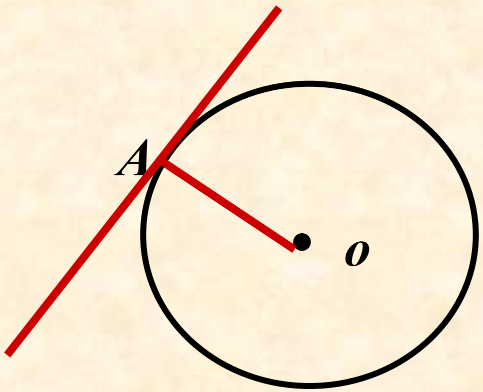
Оглавление

Касательная к окружности



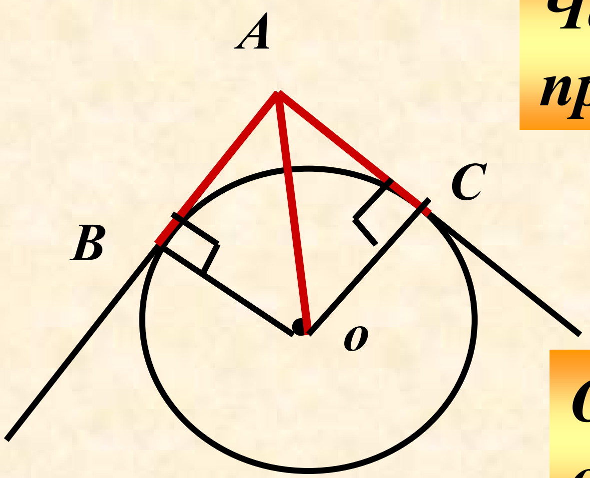
AB – секущая. Имеет *две общие точки* с окружностью

CD –касательная. Имеет *одну общую точку* с окружностью



Радиус, проведенный в точку касания, *перпендикулярен* касательной

Оглавление



Через точку вне окружности можно провести только две касательные

Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны

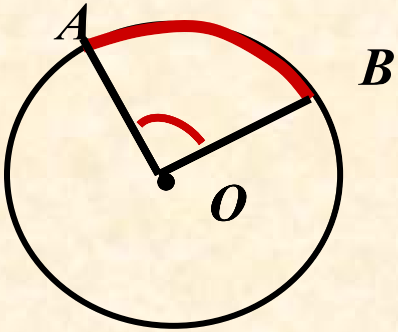
AB = AC

Отрезок, соединяющий точку А с центром, является биссектрисой угла между касательными.

Оглавление

Углы в окружности

Центральный угол

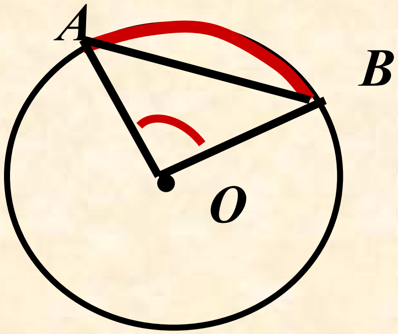


Угол, образованный двумя радиусами называется **центральным углом.**

∠ AOB - центральный

Центральный угол имеет столько градусов, сколько в дуге угла

Хорда, стягивающая дугу в 60°, равна радиусу.



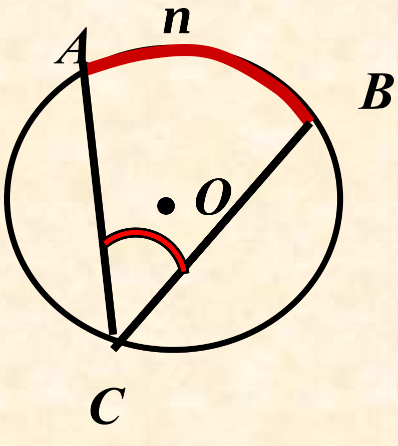
Доказательство. ∆ AOB равнобедренный, так как AO= OB, как радиусы одной окружности. Угол AOB = 60°. Следовательно, ∆AOB – равносторонний.

AB = AO = OB = R

Оглавление

Углы в окружности

Вписанный угол



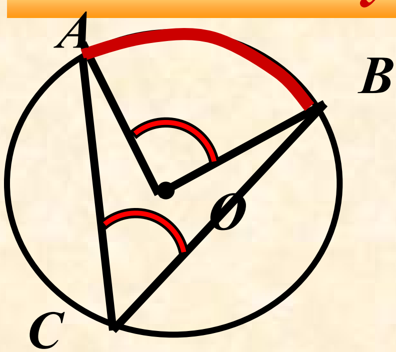
Угол, образованный двумя хордам, проведенными из одной точки окружности называется **вписанным углом.**

$\angle$ ACB - вписанный

Вписанный угол измеряется половиной дуги на которую опрается

$\angle$ ACB = ½ $\cup$ AnB

Вписанный угол равен половине соответствующего угла

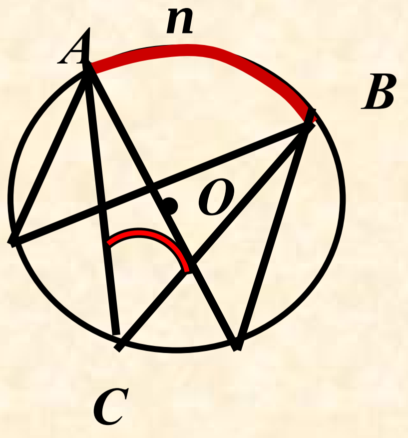


$\angle$ ACB = ½ $\angle$ AOB

Оглавление

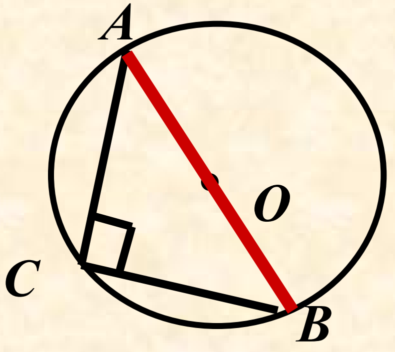
Углы в окружности

Вписанный угол



Вписанные углы, опирающиеся на одну и туже дугу равны

Вписанный угол, опирающийся на диаметр равен 90^o



$\angle$ ACB = 90^o

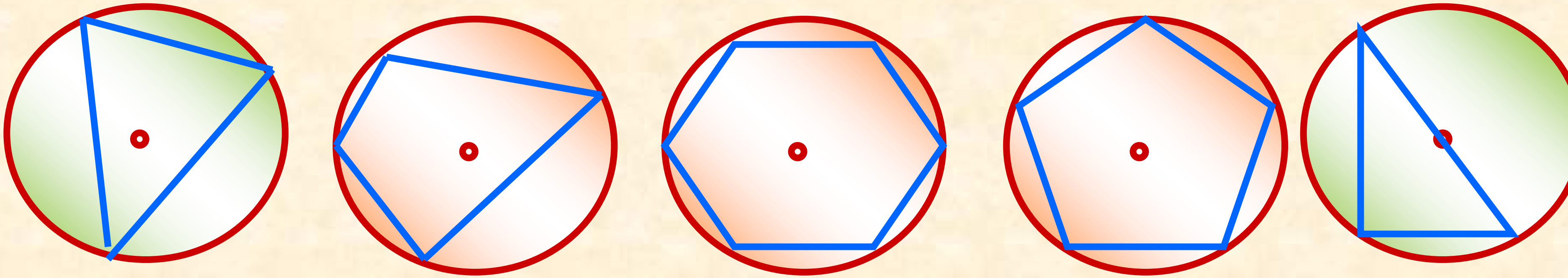
Треугольник, построенный на диаметре - прямоугольный

Δ ABC - прямоугольный

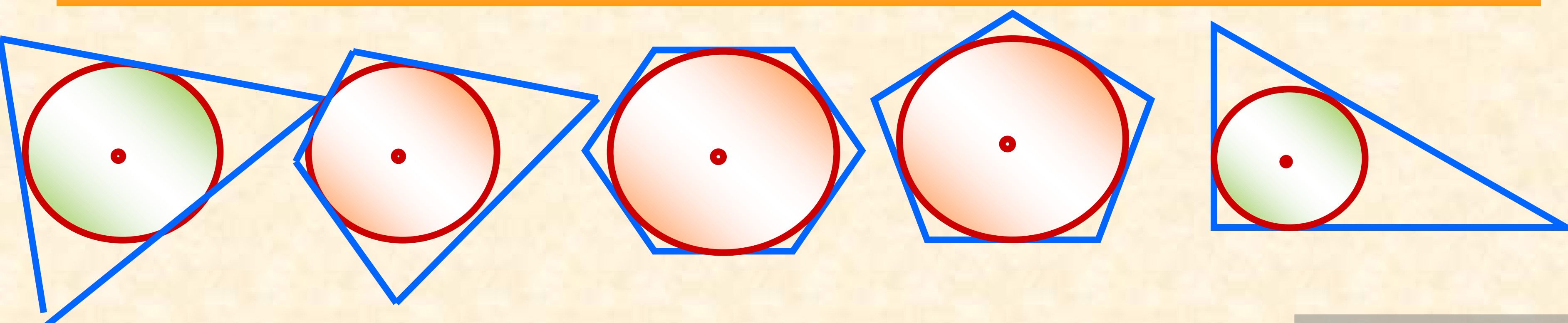
Оглавление

Вписанные и описанные окружности

Окружность описана около многоугольника, если все его вершины лежат на окружности.

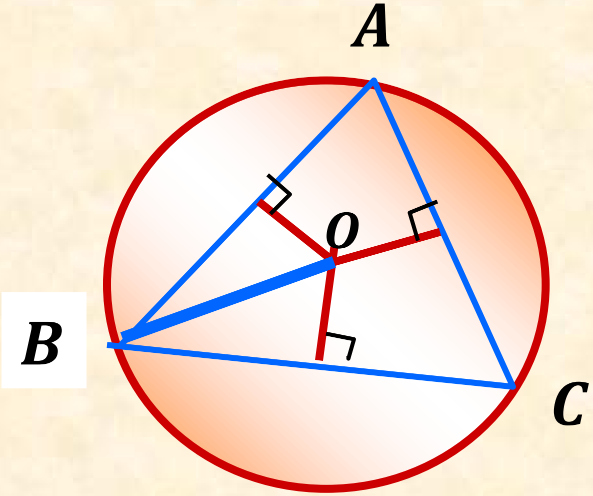


Окружность вписана в многоугольника, если она касается всех его сторон.



Окружность, описанная около треугольника

Около всякого треугольника можно описать окружность



Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикулярв.

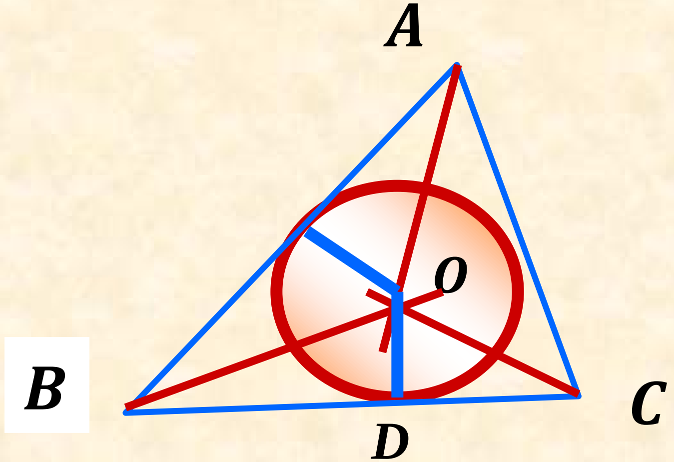
Радиусом описанной около треугольника окружности является отрезок, соединяющий центр с вершиной.

BO = R

Оглавление

Окружность, вписанная в треугольник

Во всякий треугольник можно вписать окружность

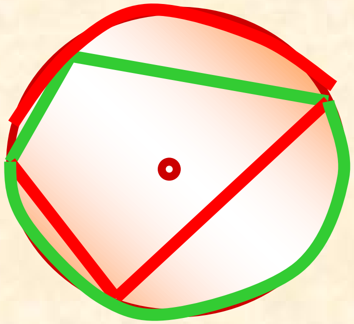


Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрис.

Радиусом является перпендикуляр, проведенный из центра к стороне

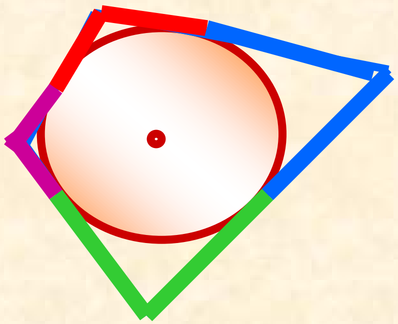
$OD = r$

Окружность, описанная около четырехугольника



Около четырехугольника, у которого суммы противоположных углов равны 180^o, можно описать окружность

Окружность, вписанная в четырехугольник



В четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, можно вписать окружность

Оглавление

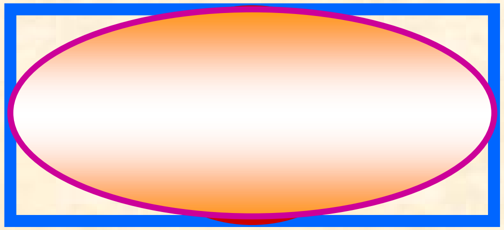
Нельзя

Описать окружность около параллелограмма

Вписать окружность в параллелограмм

Описать окружность около ромба

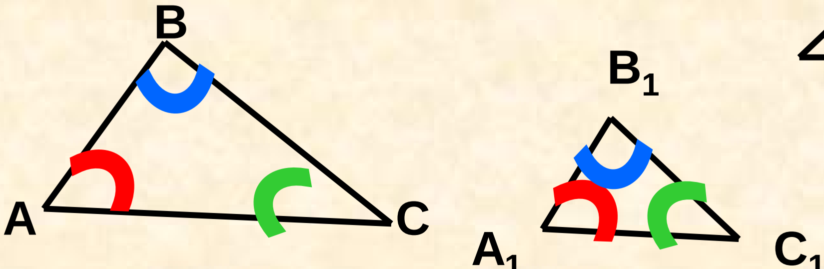
Вписать окружность в прямоугольник



Описать окружность около неравнобедренной трапеции

Оглавление

Подобие треугольников



$\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$

$\angle C = \angle C_1$

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и соответственные стороны пропорциональны

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Отношению сходственных сторон треугольников, называется коэффициентом подобия (k)

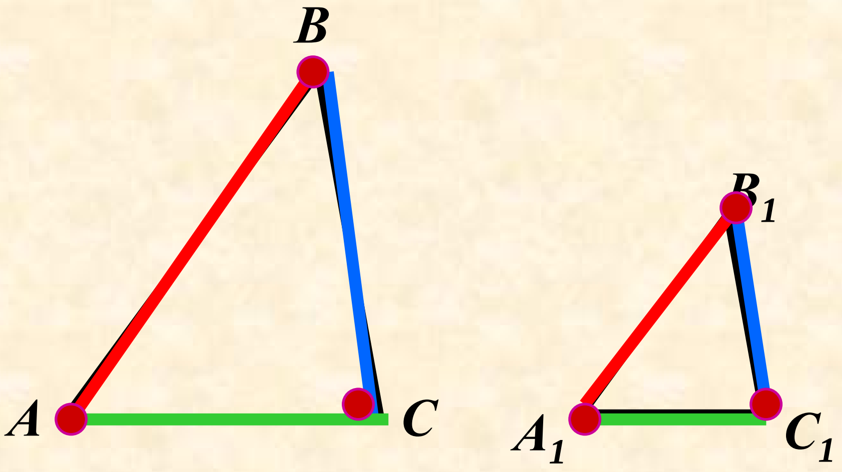
$$\frac{AB}{A_1B_1} = k \qquad \frac{BC}{B_1C_1} = k \qquad \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

k – показывает во сколько раз стороны одного Δ больше или меньше другого

Оглавление

Элементы. Запись

Стороны, лежащие против равных углов, называются сходственными (соответственными)



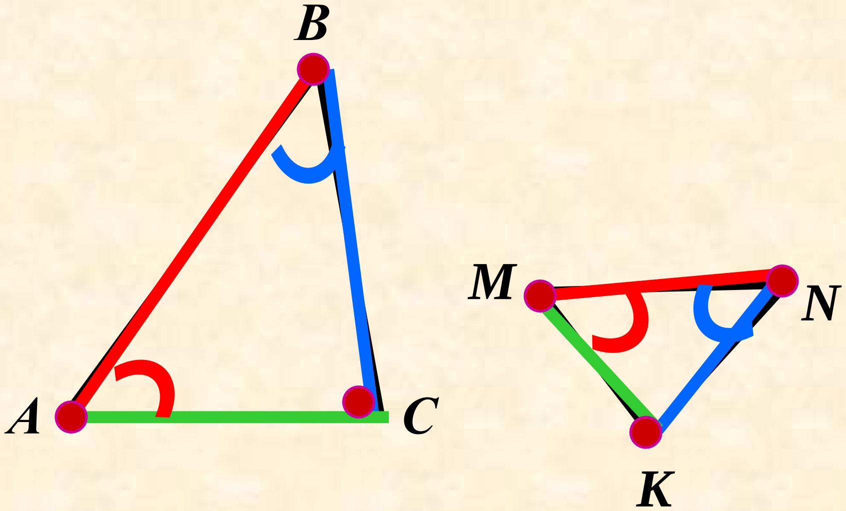
$$\frac{AB}{A_1B_1}=k \qquad \frac{BC}{B_1C_1}=k \qquad \frac{AC}{A_1C_1}=k$$

Записывается: $\Delta ABC \qquad \Delta A_1B_1C_1$

Правило записи, ***Первый треугольник записывается произвольно, второй – по вершинам соответственных углов***

$\Delta ABC \qquad \Delta A_1\ B_1\ C_1$

Оглавление



ΔABC   *ΔM N K*

Записывается: ΔABC   ΔMNK

Правило составления пропорций: ***первые две буквы, вторые две буквы, крайние буквы.***

ΔA B C   *ΔM N K*

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK} = k$$

Оглавление

Признаки подобия треугольников

1 признак

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

2 признак

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, между ними равны, то такие треугольники подобны

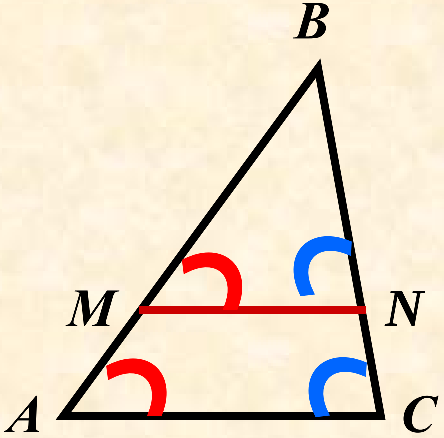
3 признак

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

Оглавление

Следствия из 1 признака подобия

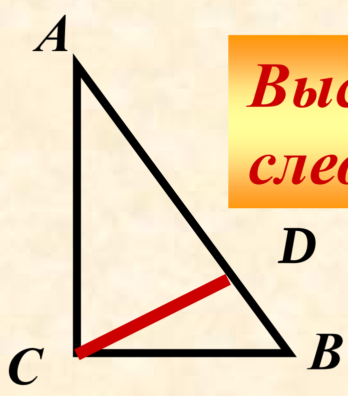
Прямая, параллельная какой-либо стороне ∆ , отсекает ∆ подобный данному



$\Delta ABC \quad \Delta MBN$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$$

Подобие в прямоугольном треугольнике



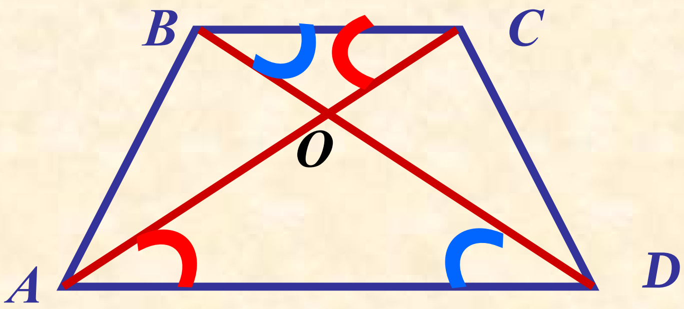
Высота, опущенная на гипотенузу, разбивает ∆ на следующие пары подобных ∆

$\Delta ABC \quad \Delta ACD \qquad \Delta ABC \quad \Delta CBD$

$\Delta ADC \quad \Delta CDB$

Оглавление

Подобие в трапеции

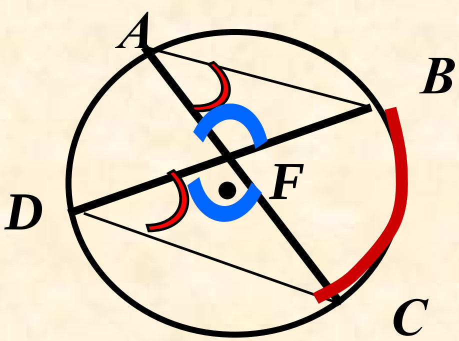


ΔBOC ΔDOA

$$\frac{BO}{DO}=\frac{OC}{AO}=\frac{BC}{AC}$$

$$BO\cdot AO=OC\cdot DO$$

Подобие в окружности



ΔABF ΔDCF

$$\frac{AB}{DC}=\frac{BF}{CF}=\frac{AF}{DF}$$

$$BF\cdot DF=AF\cdot CF$$

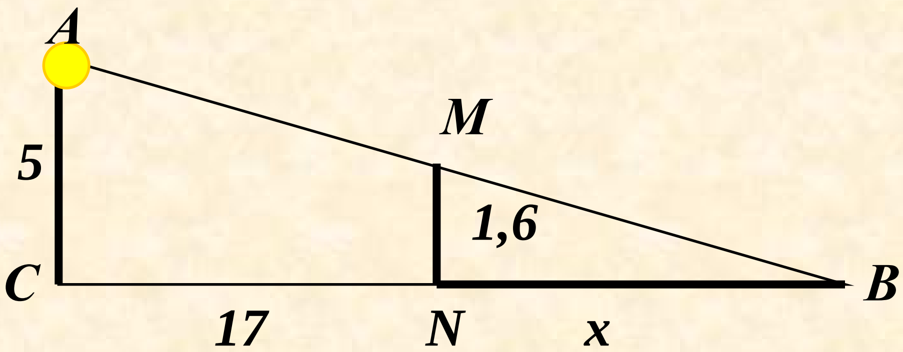
Если хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой

Оглавление

Практическое применение подобия

Задание 17

1. Человек ростом 1,6 м стоит на расстоянии 17 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5 м. Найдите длину тени человека в метрах.



$\Delta ABC \quad \Delta MBN$

$$\frac{AB}{MB}=\frac{BC}{BN}=\frac{AC}{MN}$$

$$\frac{17+x}{x}=\frac{5}{1,6}$$

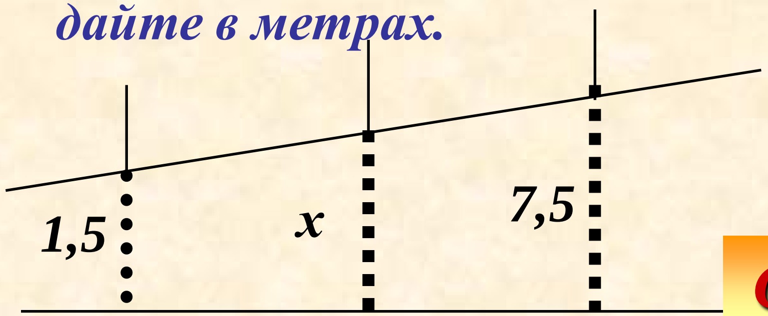
$$1,6(17+x)=5x \qquad 1,6\cdot 17+1,6x=5x$$

$$1,6\cdot 17=3,4x \qquad x=\frac{\cancel{1,6}\cdot\cancel{17}}{\cancel{3,4}_{2}}$$

$$x=0,8$$

Оглавление

2. На одной прямой на равном расстоянии друг от друга по одну сторону от дороги стоят три телеграфных столба. Крайние находятся от дороги на расстояниях 1,5 м и 7,5 м. Найдите расстояние, на котором находится от дороги средний столб. Ответ дайте в метрах.



В задаче лучше использовать понятие средней линии трапеции

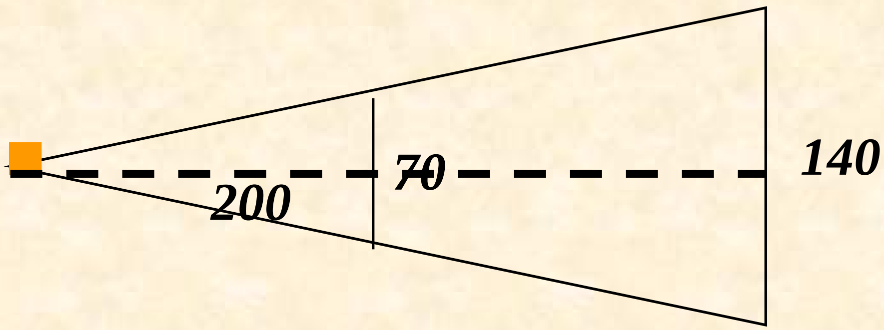
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

$$x = \frac{1{,}5 + 7{,}5}{2}$$

$$x = 4{,}5$$

Оглавление

3. Проектор полностью освещает экран А высотой 70 см, расположенный на расстоянии .200 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран В высотой 140 см, чтобы он был полностью освещен, если настройки проектора остаются неизменными?



Треугольники - подобны

$$k = \frac{140}{70} = 2$$

$$x = 2 \cdot 200 = 400$$

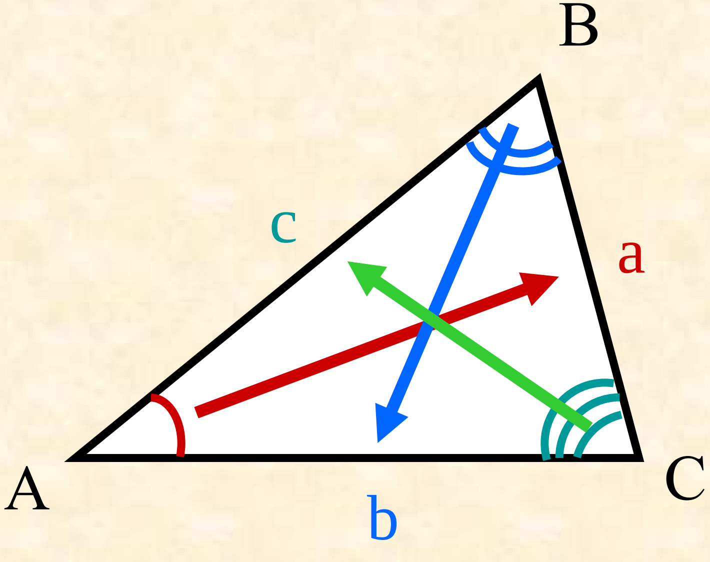
Оглавление

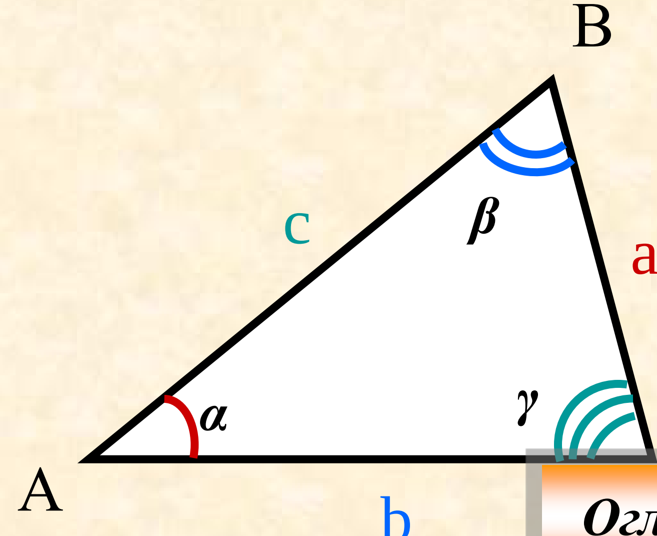
Решение треугольника

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон

Решением треугольника называется нахождение его элементов (то есть сторон и углов) по каким-нибудь данным элементам.

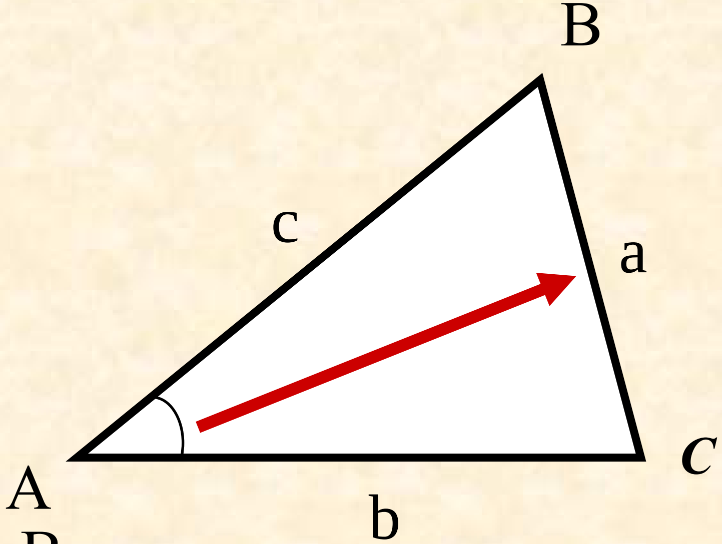




Оглавление

Теорема косинусов

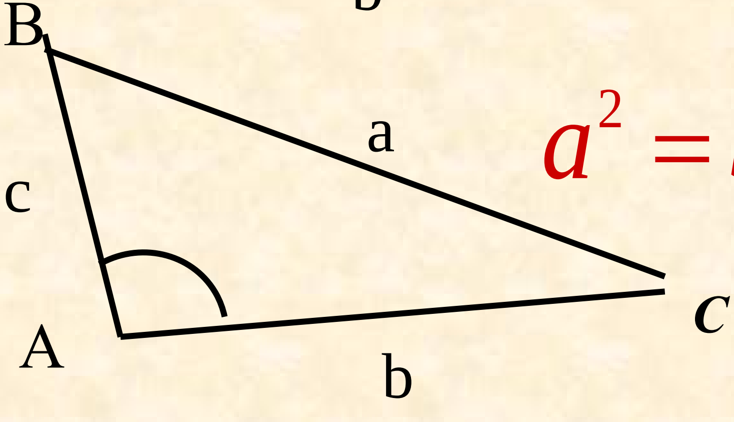
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Если угол А тупой,

то cosA = - cos(180º - A)

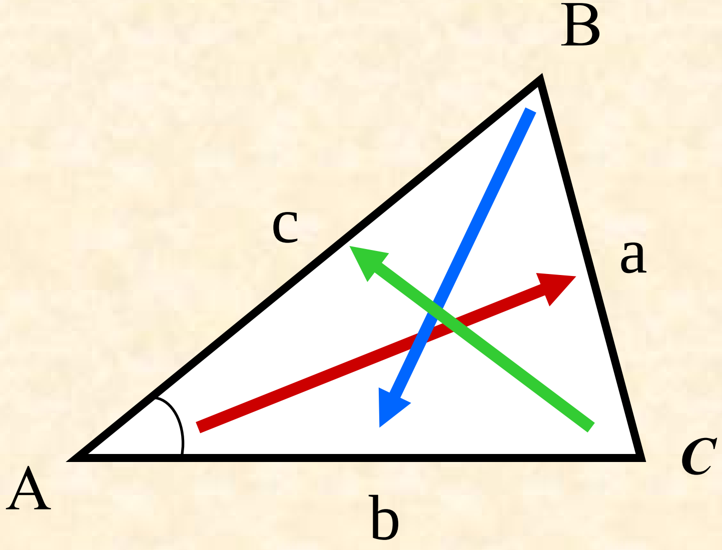


$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180^\circ - A)$$

Оглавление

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Если один из углов тупой,

то $\sin A = \sin(180^o - A)$

Оглавление

Использование теорем

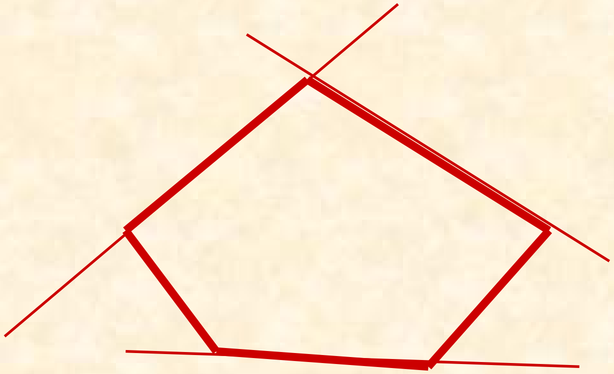
1. Если известны две стороны и угол между ними, использовать теорему косинусов.

2. Если известны сторона и два угла, использовать теорему синусов.

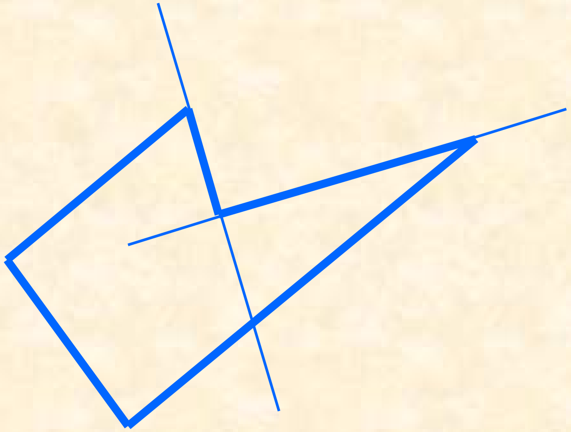
3. Если известны три стороны, использовать либо теорему косинусов, либо теорему синусов для нахождения углов

Оглавление

Выпуклые, невыпуклые многоугольники



Выпуклый



Невыпуклый

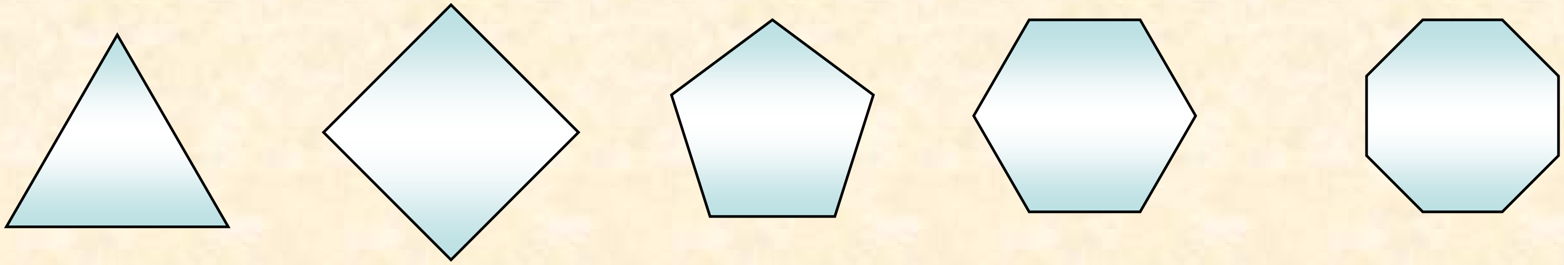
Все стороны в одной полуплоскости

Стороны в разных полуплоскостях

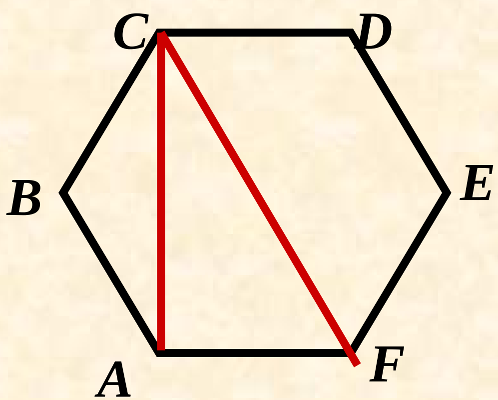
Оглавление

Правильные многоугольники

• **Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.**



Элементы



A, B, C, D, E. F - вершины

A B, BC, CD, DE. EF - стороны *a*

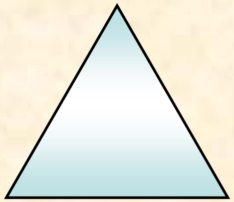
Количество сторон *n*

CA CF…- диагонали *d*

Оглавление

Название правильных многоугольников

***n* = 3**



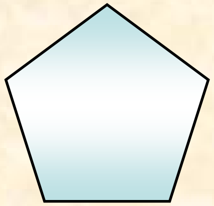
Равносторонний треугольник

***n* = 4**

Квадрат

Другие многоугольники называются по количеству сторон

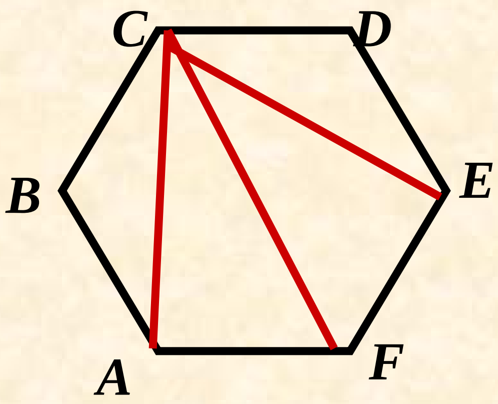
***n* = 5**



5-ти угольник

Оглавление

Основные формулы



Количество ∆ при одной вершине, образуемых диагоналями равно **n – 2**

Сумма углов n – угольника равна

$(n-2)\cdot 180^{o}$

Угол n – угольника равн

$$\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$$

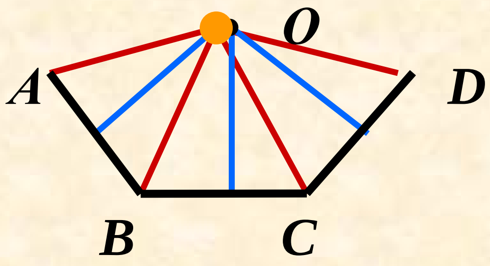
Количество диагоналей равно

$$\frac{(n-3)\cdot n}{2}$$

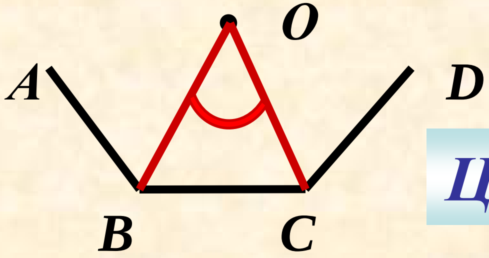
Оглавление

Центр правильных многоугольников

•Любой правильным многоугольник имеет точку равноудаленную от вершин и сторон



Эта точка называетс центром правильного многоугольника



Угол ВОС называется центральным α

Центральных углов столько, сколько сторон

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

$n = 3$ $\quad \alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

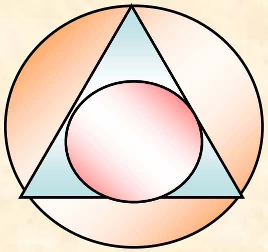
$n = 4$ $\quad \alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

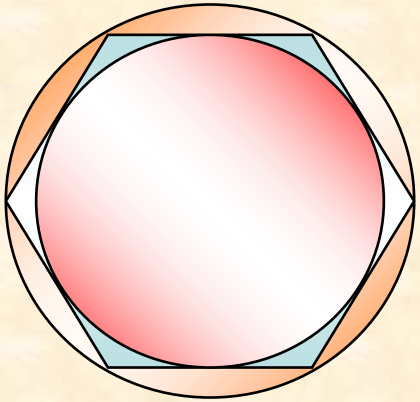
$n = 6$ $\quad \alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

Оглавление

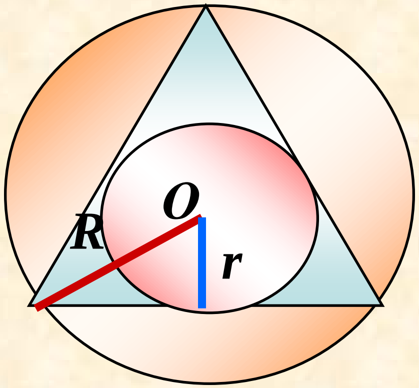
Вписанная и описанная окружности

Центр правильного многоугольника является центром вписанной и описанной окружностей





Радиусы вписанной и описанной окружностей



Оглавление

Формулы для радиусов

n = 3	$R_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$r_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$
n = 4	$R_4 = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$r_4 = \frac{a_4}{2}$
n = 6	$R_6 = a_6$	$r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$

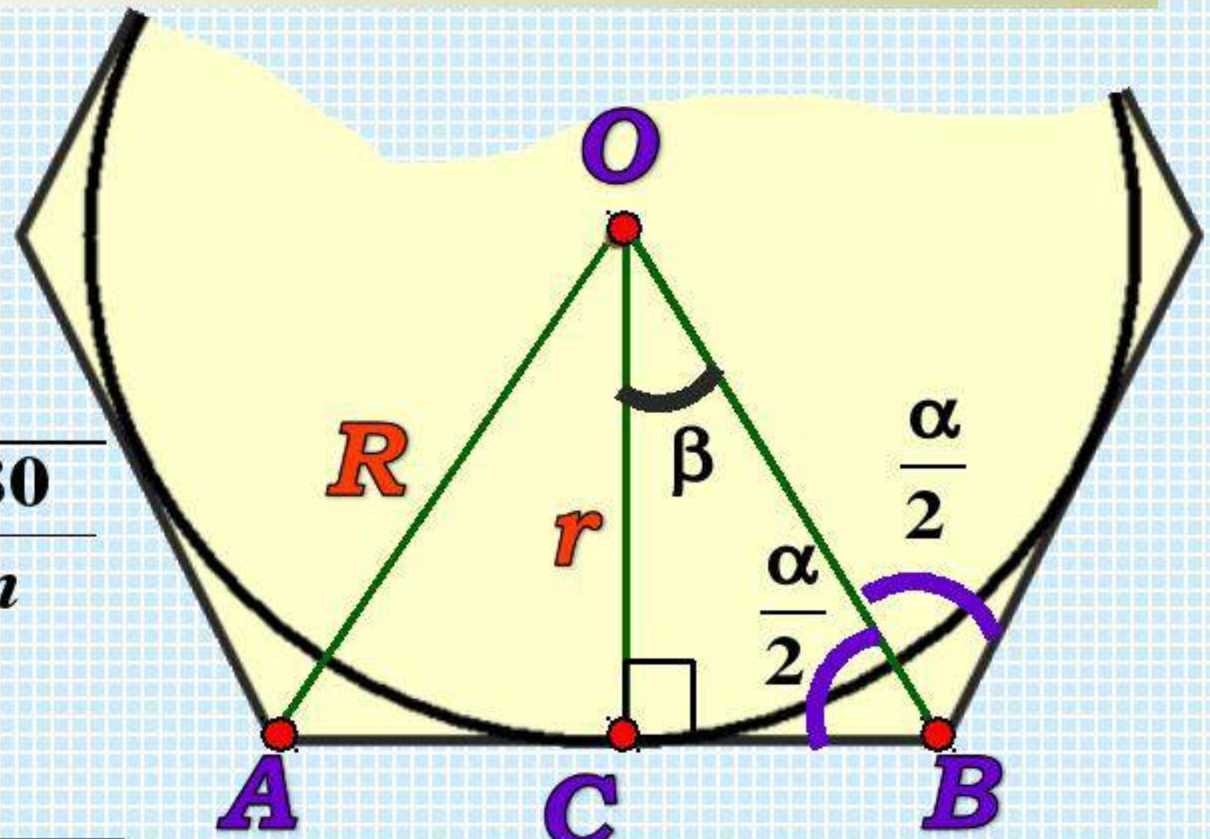
Оглавление

Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников

$$\beta = \frac{180}{n}$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180}{n}}$$

$$r = OC = \frac{CB}{tg\,\beta} = \frac{a}{2tg\,\frac{180}{n}}$$



Площади фигур

Четырехугольники

Параллелограмм

$S = ah_a$

$S = ab\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\beta$

α – угол между сторонами

β – угол между диагоналями

Прямоугольник, квадрат

$S = ab$

$S = a^2$

Ромб

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = MN \cdot h,$$ MN - средняя ллиния

Оглавление

Площади фигур
Треугольник

Треугольник — $S = \frac{1}{2} a h_a$ — $S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$

Формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p - полупериметр

Прямоугольный треугольник — $S = \frac{1}{2} ab$ — **a и b – катеты**

Правильный треугольник — $S = \frac{1}{2} aa\sin 60^o$ — $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Правильный шестиугольник — $S = 6\,S_{\Delta}$ — $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Оглавление

Справочный материал. Площади

Параллелограмм

$S = ah_a$

$S = ab\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\beta$

Ромб

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

Треугольник

$S = \frac{1}{2} ah_a$

$S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p - полупериметр

Правильный треугольник

$S = \frac{1}{2} aa\sin 60^o$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Правильный шестиугольник

$$S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Оглавление

Трапеция

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = MN \cdot h$, MN - средняя ллиния

Окружность. Круг

Окружность – линия, все точки которой равноудалены от центра

Круг – часть плоскости, заключенной внутри окружности

Длина окружности

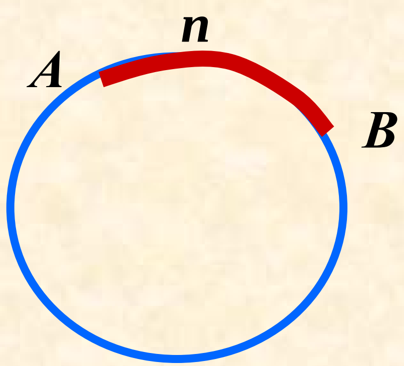
$C = 2\pi R$

Площадь круга

$S = \pi R^2$

Оглавление

Части окружности и круга
Длина дуги



Пусть дуга AnB содержит β градусов и имеет длину l

Используем : во всей длине окружности 360º. Составим пропорцию.

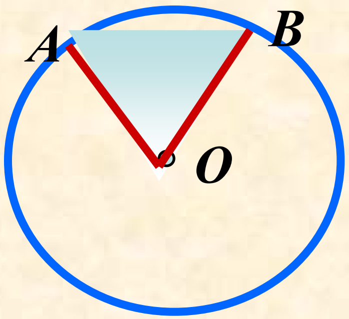
$2\pi R$ ———— 360^o

l ———— β

$$l = \frac{2\pi R \cdot \beta}{360}$$

Сектор

Часть круга, заключенная между двумя радиусами



Пусть $\angle AOB$ сектора AOB содержит β градусов и имеет площадь $S_{сек}$

πR^2 ———— 360^o

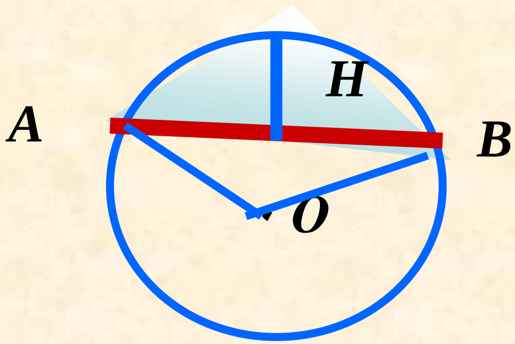
$S_{сек}$ ———— β

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2 \cdot \beta}{360}$$

Оглавление

Сегмент

Часть круга, заключенная между хордой и соответствующей дугой окружности



H – высота сегмента

$$S_{сег} = S_{сек} - S_{\Delta AOB}$$

Оглавление

Радиусы вписанных и описанных окружностей для треугольников

Любые треугольники

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$r = \frac{2S}{p}$$

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Прямоугольные треугольники

$$R = \frac{c}{2}$$

c - гипотенуза

$$R = m_c$$

m_c – медиана, проведенная к гипотенузе

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Равносторнние треугольники

$$R = \frac{2h}{3}$$

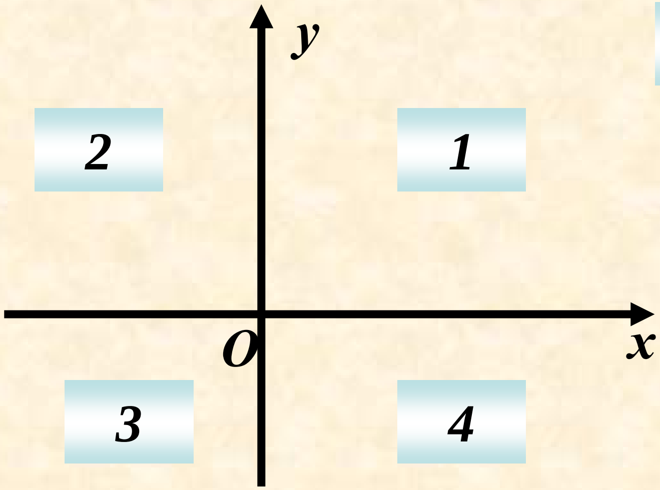
$$r = \frac{h}{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Оглавление

Декартовы координаты на плоскости

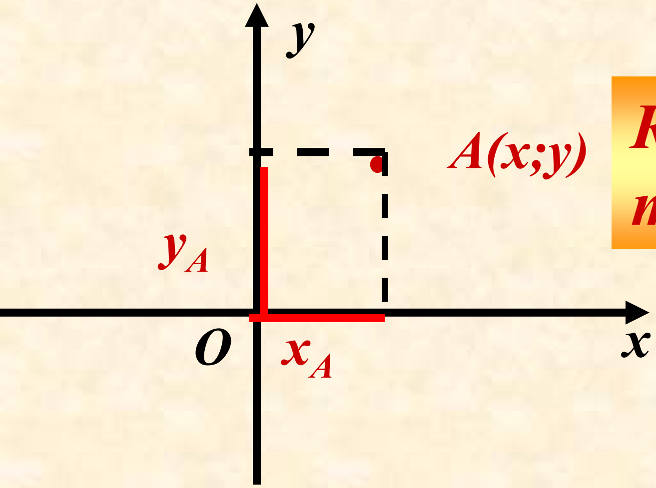


ОУ – ось ординат

ОХ – ось абсцисс

Плоскость осями делится на 4 четверти

Каждой точке на плоскости соответствуют координаты: х - абсцисса, у - ордината



Каждой паре координат соответствует точка плоскости

Оглавление

Расстояние между точками

$A(x_A ; y_A)$ $B(x_B ; y_B)$

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Длина отрезка равна квадратному корню из суммы квадратов разности соответствующих координат

Координаты середины отрезка

$A(x_A ; y_A)$ $B(x_B ; y_B)$ $C(x_C ; y_C)$ -середина AB

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Координаты середины отрезка равны полу сумме соответствующих координат

Оглавление

Уравнение прямой

Любая прямая в декартовых координатах имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$,

где a, b, c любые действительные числа, причем хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю.

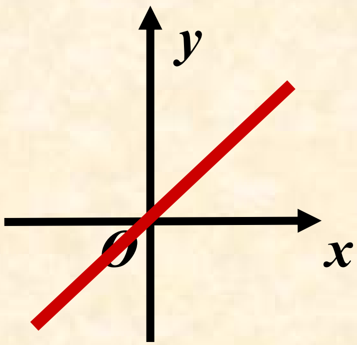
Из курса алгебры известно, что прямая является графиком линейной функции y = kx + b

Выразим y из уравнения $ax + by + c = 0$

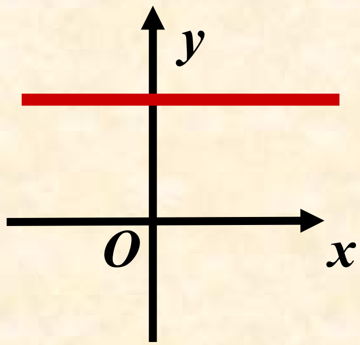
$by = -ax - c$ $y =$ **k** x **+b**

Оглавление

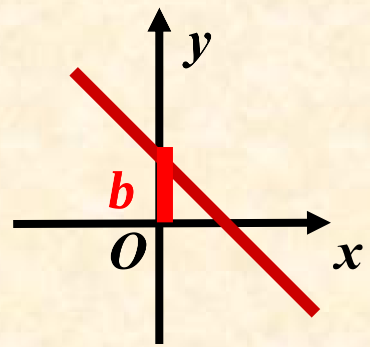
Расположение прямой в системе координат



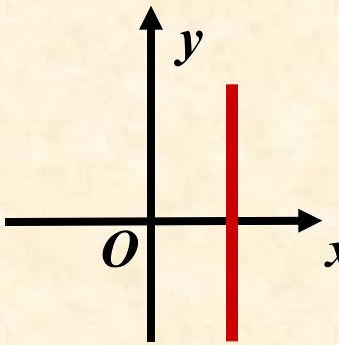
$y = kx$



$y = b$

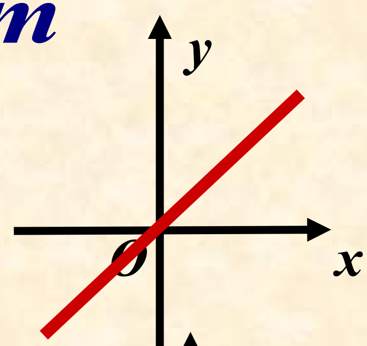


$y = kx + b$

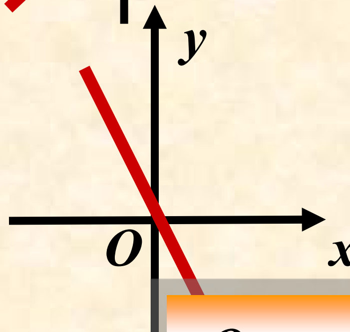


$x = c$

Угловой коэффициент



$k > 0$ прямая расположена в 1-ой и 3-ей четвертях

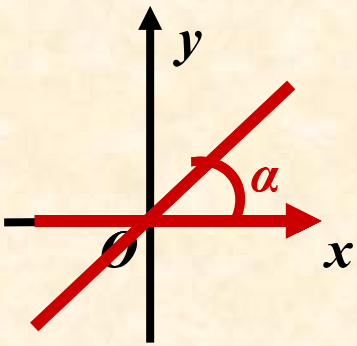


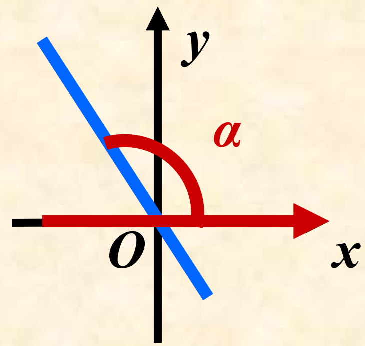
$k < 0$ прямая расположена во 2-ой и 4-ой четвертях

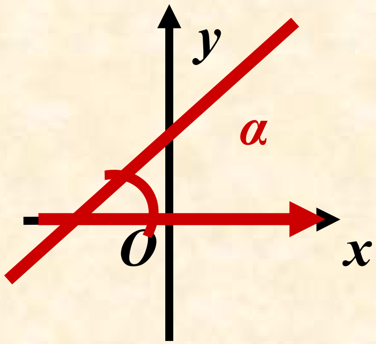
$$k = \frac{y}{x}$$

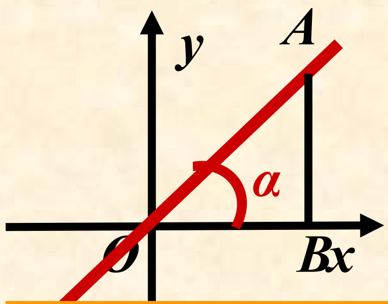
Оглавление

Угловой коэффициент k обуславливает угол наклона прямой с положительным направлением оси X









$$k = \frac{y}{x}$$

Δ *AOB*

$$k = \frac{AB}{OB} = tg\alpha$$

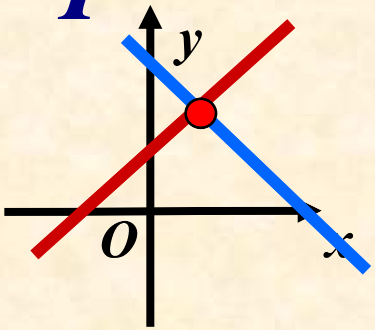
Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси X

Если на прямой взять 2 точки $A(x_A ;y_A)$ и $B(x_B ;y_B)$, то угловой коэффициент k равен

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Расположение прямых в системе координат

Прямые пересекаются

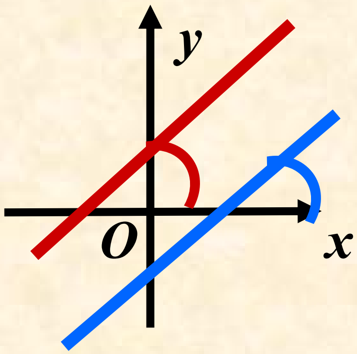


Прямые имеют одну общую точку

Для нахождения координат точки пересечения нужно решить систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Прямые параллельны



$y = k_1 x + b_1$

$y = k_2 x + b_2$

Условие параллельности прямых:

прямые параллельны, если равны угловые коэффициенты

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{a_2}$$

Оглавление

Уравнение окружности

Любая окружность в декартовых координатах имеет уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

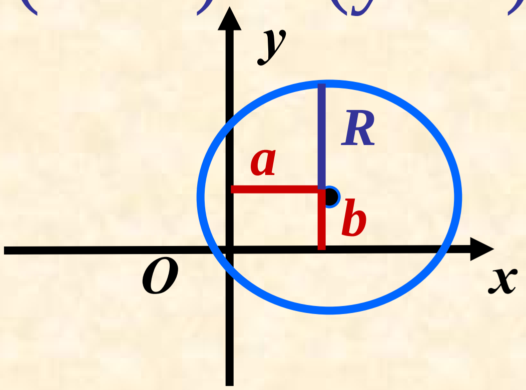
где (a; b) – координаты центра окружности

a и b брать с противоположным знаком

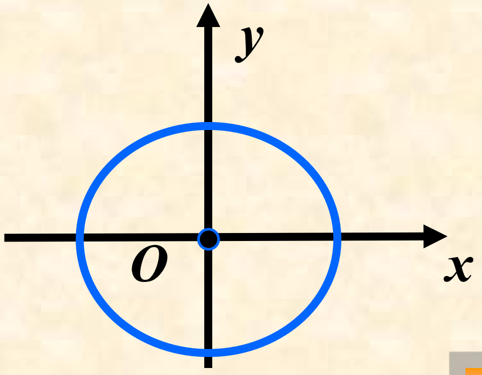
R – радиус окружности

$x^2+y^2=R^2$ **- окружность с центром в начале координат**

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

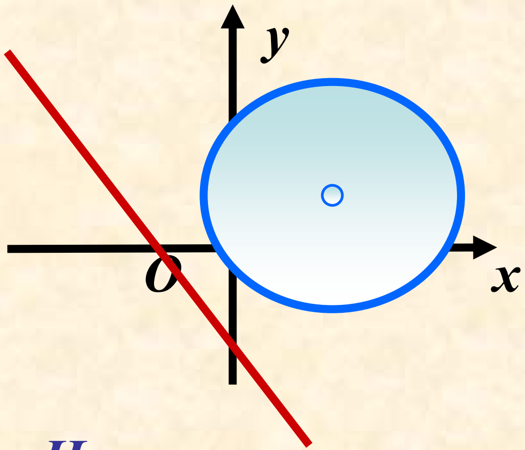


$x^2+y^2=R^2$



Оглавление

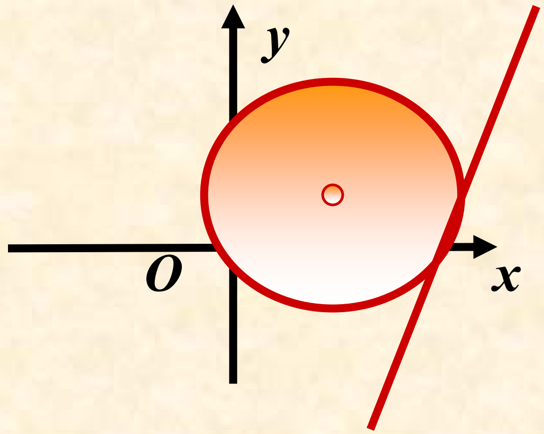
Расположение окружности и прямой



Не пересекаются

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ mx+dy=d\end{cases}$$

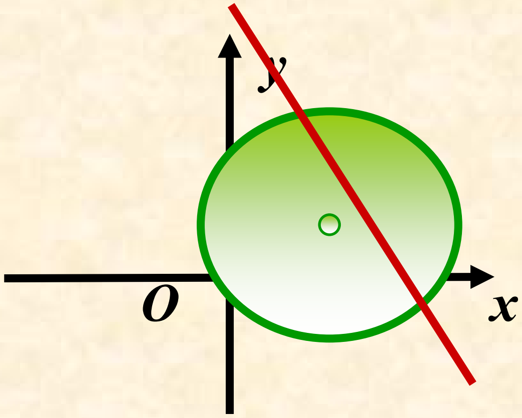
Система не имеет решений



Касаются

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ mx+dy=d\end{cases}$$

Система имеет одно решение



Пересекаются

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\\ mx+dy=d\end{cases}$$

Система имеет два решения

Оглавление

Векторы на плоскости

$\overline{a}$

B Конец

A Начало

Вектор $\overline{AB}$

Вектор $\overline{a}$

Координаты вектора

$\overline{a}$

$B(x_b;y_{b\,b})$

Конец

$A(x_a;y_a)$

Начало

$$\overline{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a)$$

a_1 a_2

$$\overline{a}(a_1;a_2)$$

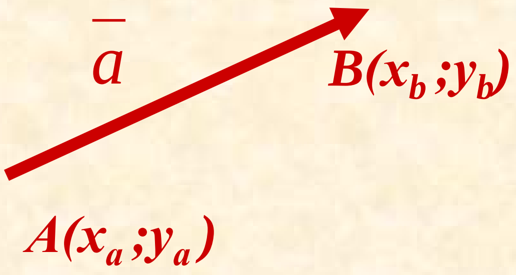
Оглавление

А (- 2; 1), В (3; -1). **Найдите координаты вектора** **Найдите координаты вектора** $\overline{BA}$

$$\overline{BA}(-2-3;1+1) \qquad \overline{BA}(-5;2)$$

От конца отнять начало!

Длина вектора



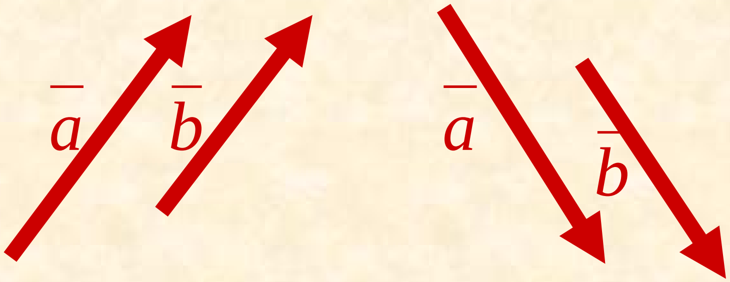
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$

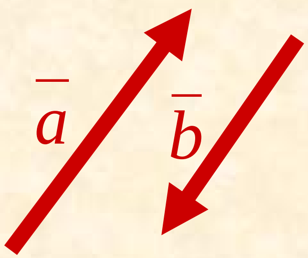
Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов соответствующих координат.

Оглавление

Коллинеарные векторы

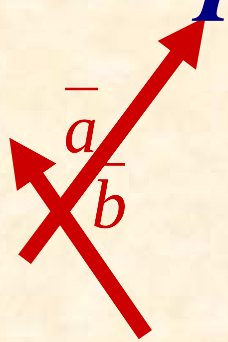


Векторы параллельны и сонаправлены



Векторы параллельны и противоположно направлены

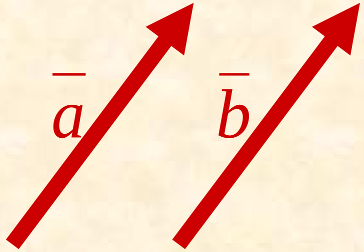
Пересекающиеся векторы



Векторы пересекаются

Оглавление

Равные векторы



Сонаправленые векторы одинаковой длины - равны

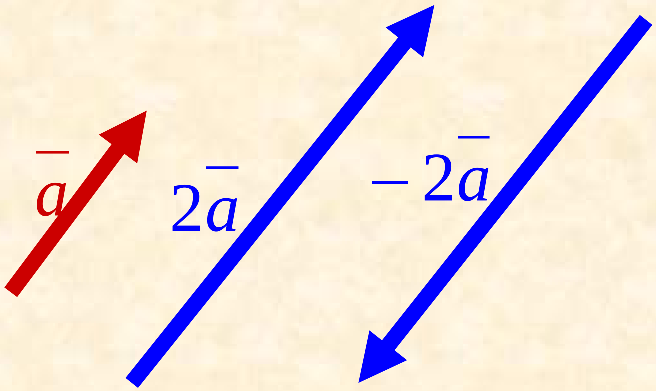
$$\overline{a} = \overline{b}$$

$\overline{a}(a_1; a_2)$ $\overline{b}(b_1; b_2)$

У равных векторов равны координаты

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2;$$

Действия с векторами
Умножение вектора на число



Умножение вектора на число в координатах

$\overline{a}(a_1; a_2)$

$\lambda\overline{a}(\lambda a_1; \lambda a_2)$

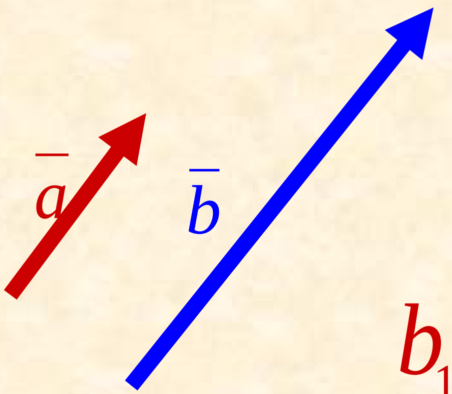
λ – любое число

Чтобы умножить вектор на число надо умножить наэто число каждую координату.

Оглавление

Свойство коллинеарных векторов

$$\overline{a}(a_1;a_2) \qquad \overline{b}(b_1;b_2)$$



$$\overline{b} = \lambda\overline{a} \qquad \lambda\overline{a}(\lambda a_1;\lambda a_2)$$

$$b_1 = \lambda a_1; \quad b_2 = \lambda a_2; \quad b_3 = \lambda a_3$$

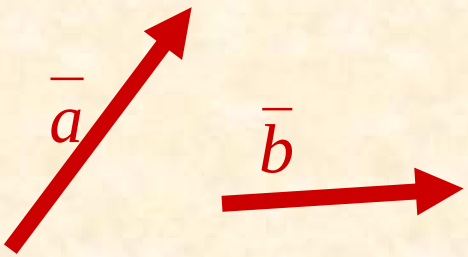
$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \lambda$$

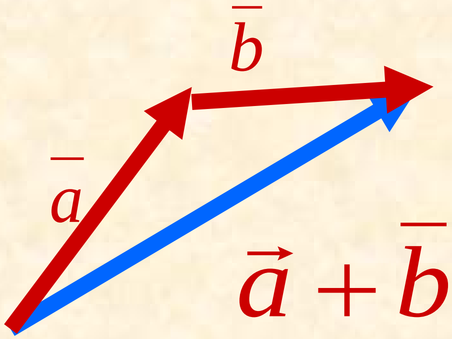
Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Оглавление

Сложение векторов

Правило треугольника

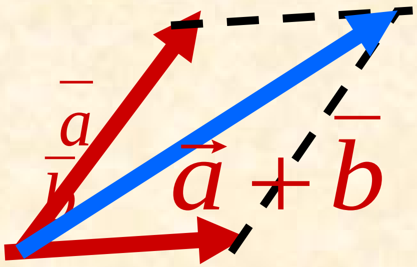




Соединить конец с началом.

Вектор из начала будет суммой

Правило параллелограмма



Соединить начала.

Достроить до параллелограмма

Диагональ, исходящая из начал будет суммой

Оглавление

Сложение векторов в координатах

$\overline{a}(a_1; a_2)$ $\overline{b}(b_1; b_2)$

$\overline{a} + \vec{b} = \vec{c}$

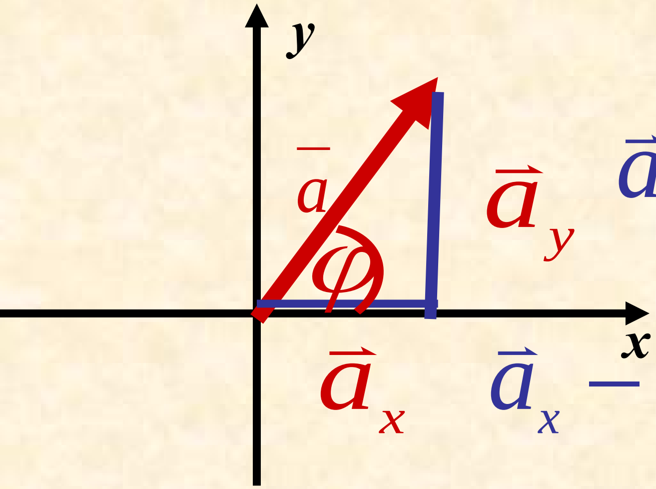
$\vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

Координаты суммарного вектора равны сумме соответственных координат слагаемых векторов

Оглавление

Разложение вектора по базису

Любой вектор с можно представить как сумму двух векторов $\lambda\vec{a} + \eta\vec{b}$



$\vec{a}_y$ – проекция вектора $\vec{a}$ на ось У

$\vec{a}_x$ – проекция вектора $\vec{a}$ на ось Х

$$\left|\vec{a}_x\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$\left|\vec{a}_y\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \sin\varphi$$

Оглавление

Скалярное произведение векторов

Скаляр – величина без направления

За скалярное произведение векторов принимается величина, равная сумме произведение соответствующих координат

Для обозначения скалярного произведения используется точка

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Скалярное произведение используется для нахождения угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$$

Оглавление

Угол между векторами

Скалярное произведение используется для нахождения угла между векторами

$$\overline{a}(a_1;a_2)$$
$$\overline{b}(b_1;b_2)$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|}$$

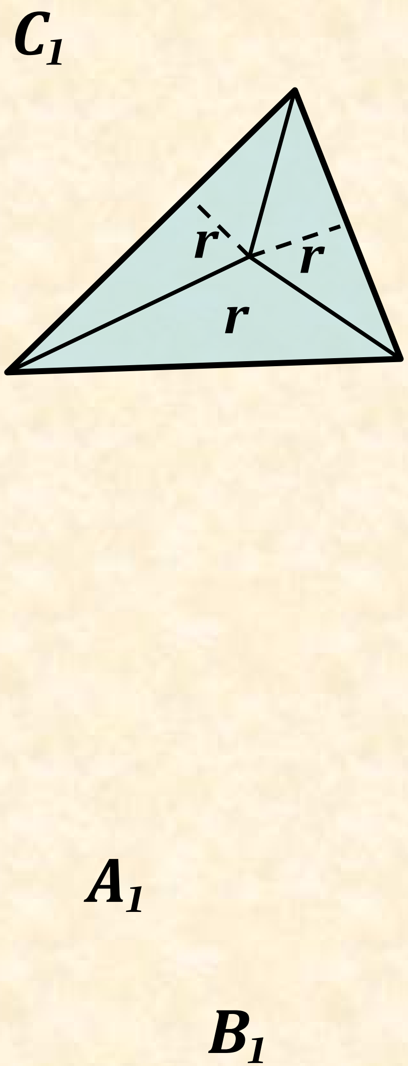
$$\cos\varphi = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{|a|\cdot|b|}$$

$$\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$$

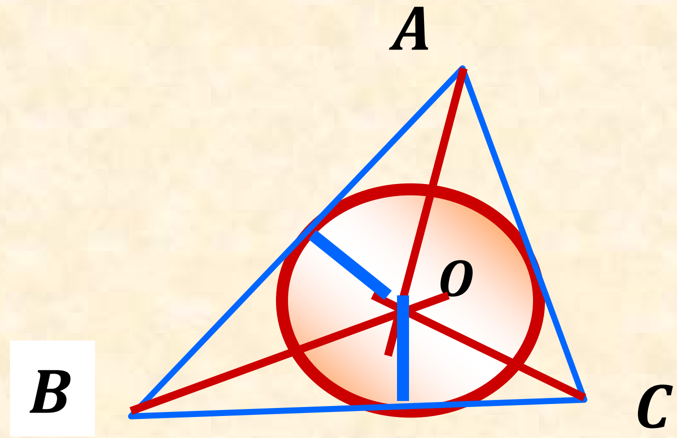
Векторы коллинеарны (параллельны), если угол между ними равен 0. Скалярное произведение равно 1, - 1

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0

Оглавление

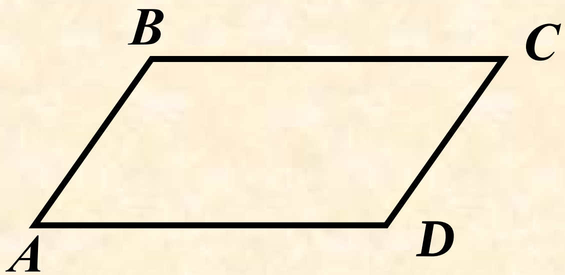


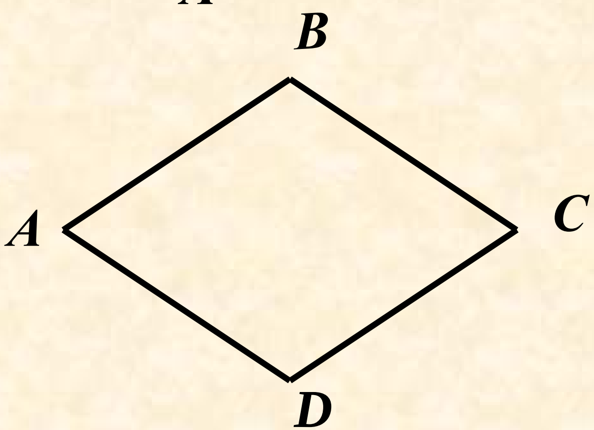
C1
r
r
r
A1
B1



A
O
B
C

⇒





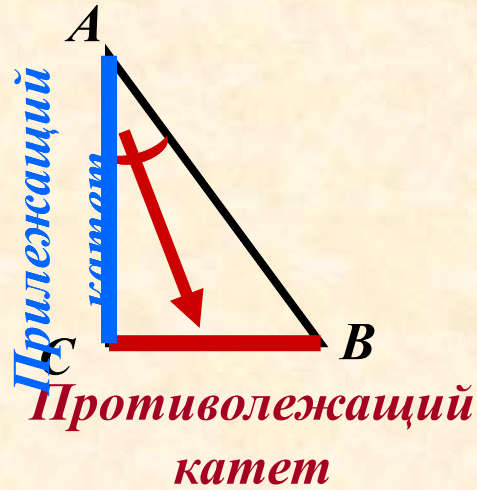
AnB

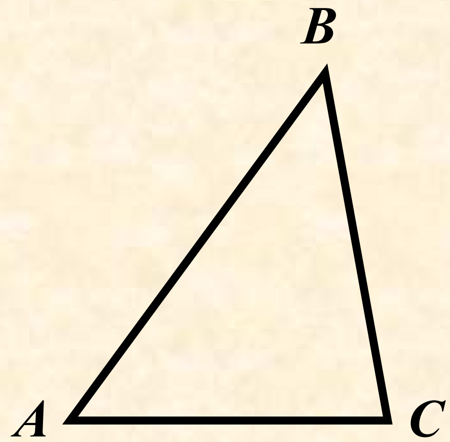
Повторение

Свойства равнобедренного треугольника

Высота, проведенная к основанию является медианой и биссектрисой

Углы при основании равны





∠1 = ∠2, как накрест лежащие углы при BC || AD и секущей BD