



Площади многоугольников на клетчатой бумаге



Полезная информация

- Членки ИМС
- Разработчики ИИМ
- Эксперты ПК регионов
- Преподаватели курсов и семинаров
- Учителя школ
- Родители и учащиеся

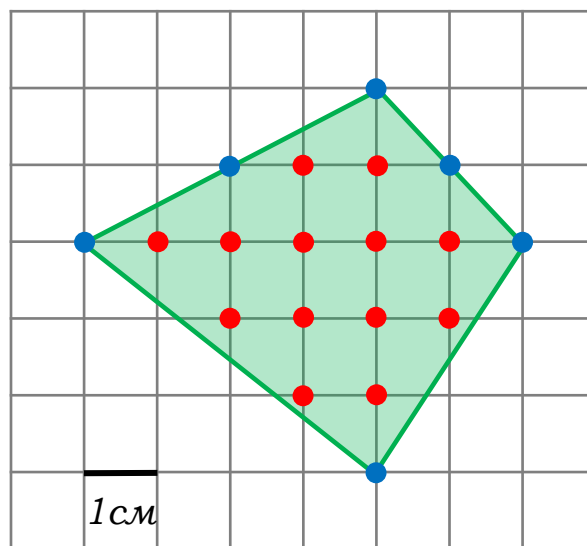
Подписаться на рассылку новостей



Теорема Пика

Пусть **L** – число целочисленных точек внутри многоугольника, **B** – количество целочисленных точек на его границе, **S** – его площадь. Тогда справедлива формула Пика:

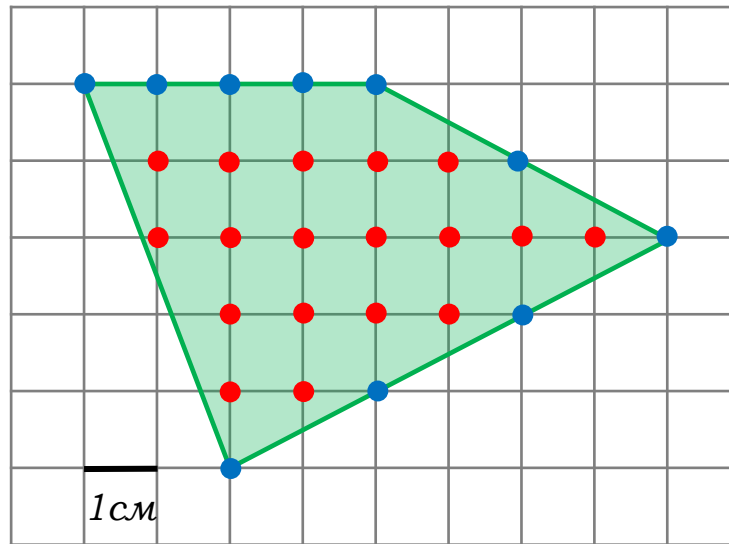
$$S = L + B/2 - 1$$



Пример 1.

Для многоугольника на рисунке **L = 13** (красные точки), **B = 6** (синие точки, не забудьте о вершинах!), поэтому **S = 13 + 6/2 - 1 = 15** квадратных единиц.

Теорема Пика



Пример 2.

$L = 18$ (красные точки),

$B = 10$ (синие точки), поэтому

$$**$S = 18 + 10/2 - 1 = 22$**$$

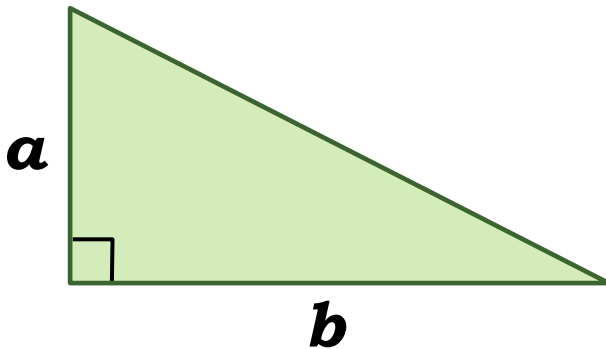
квadratных единиц.

Площадь прямоугольного треугольника

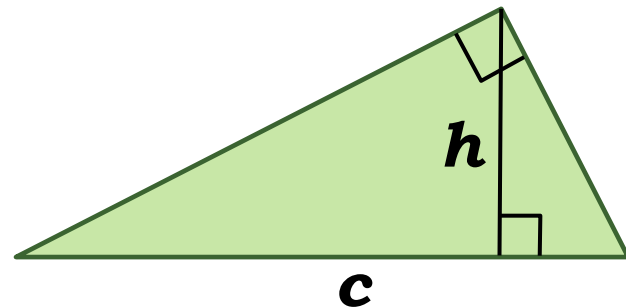
Пусть **a** и **b** – катеты прямоугольного треугольника, **c** – гипотенуза, **h** – высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, **S** – его площадь.

Тогда справедливы формулы:

$$S = \frac{1}{2}ab$$



$$S = \frac{1}{2}ch$$

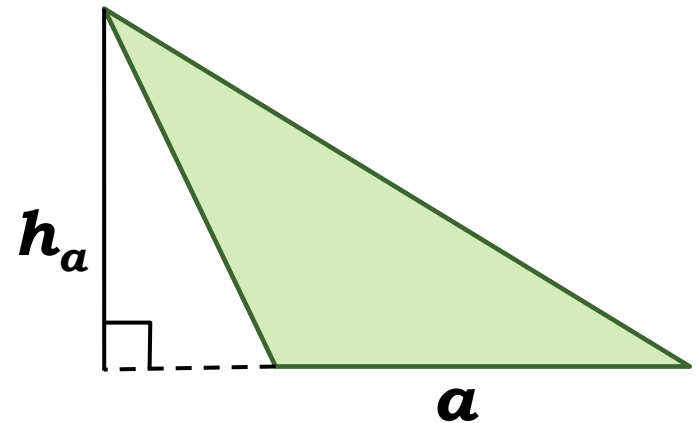
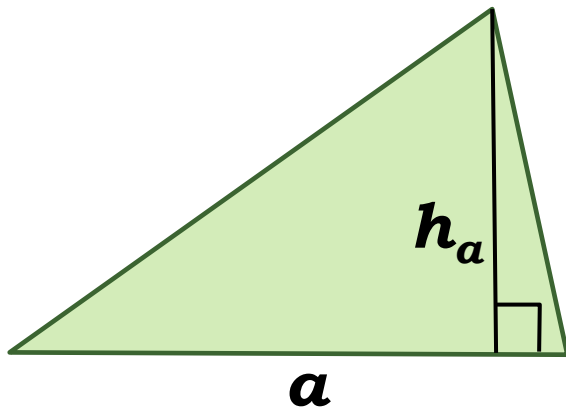


Площадь произвольного треугольника

Пусть a – сторона треугольника, h_a – высота, проведенная к этой стороне, S – его площадь.

Тогда справедлива формула:

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

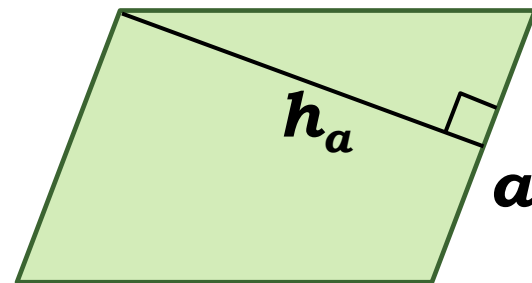
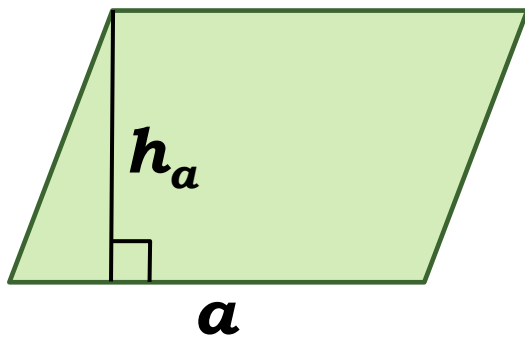


Площадь параллелограмма

Пусть a – сторона параллелограмма, h_a – высота, проведенная к этой стороне, S – его площадь.

Тогда справедлива формула:

$$S = ah_a$$

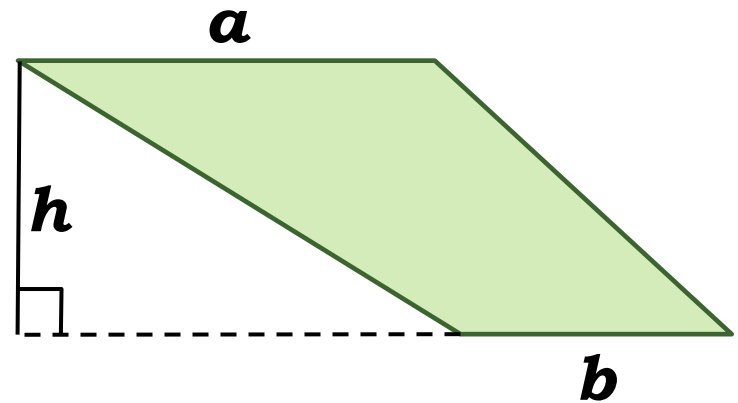
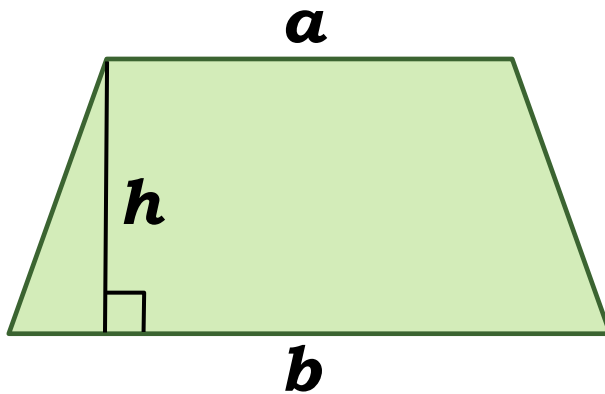


Площадь трапеции

Пусть **a** и **b** – основания трапеции, **h** – высота, **S** – площадь трапеции.

Тогда справедлива формула:

$$S = \frac{a + b}{2} h$$

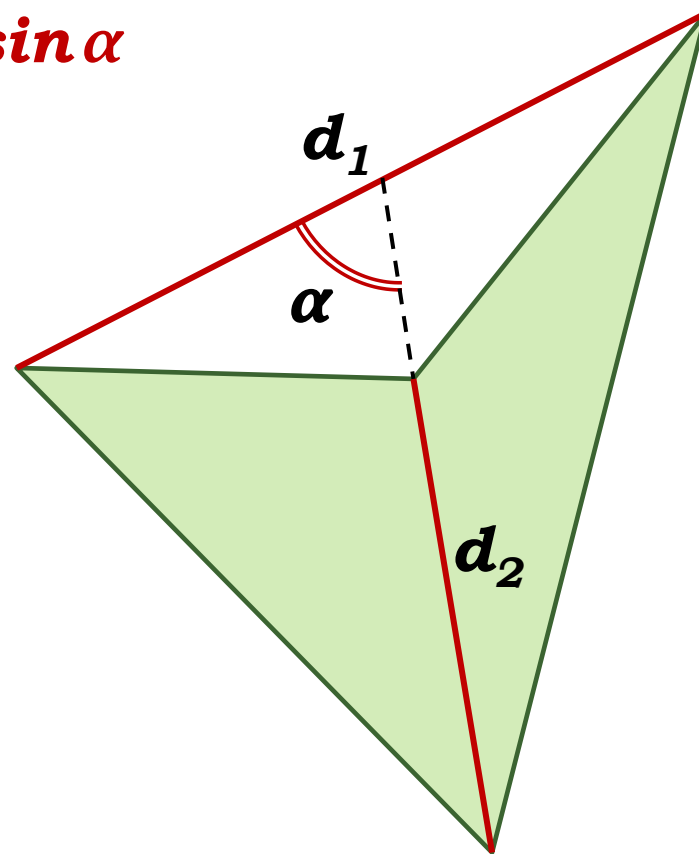
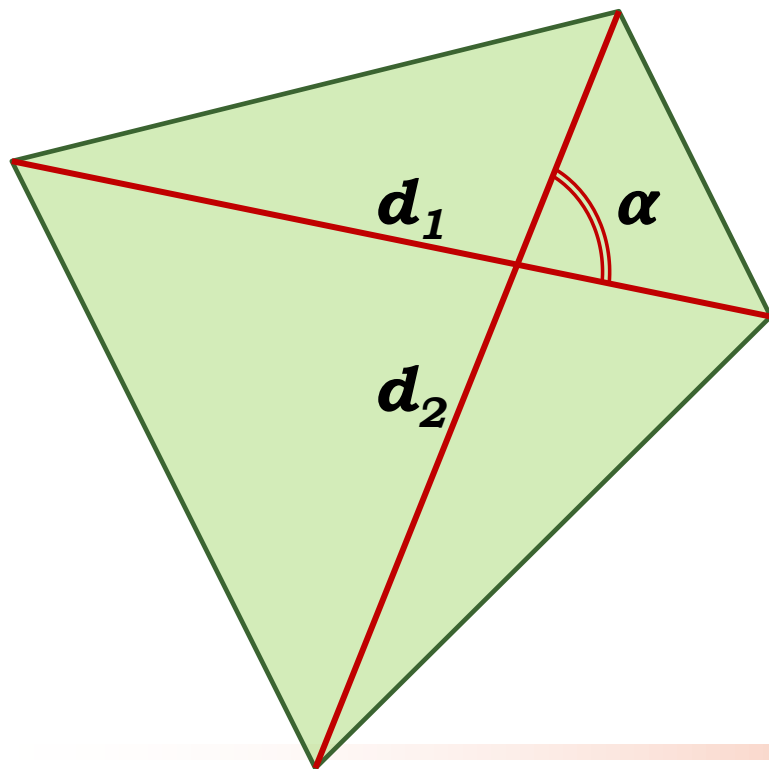


Площадь четырехугольника

Пусть d_1 и d_2 диагонали произвольного четырехугольника, α – угол между ними, S – его площадь.

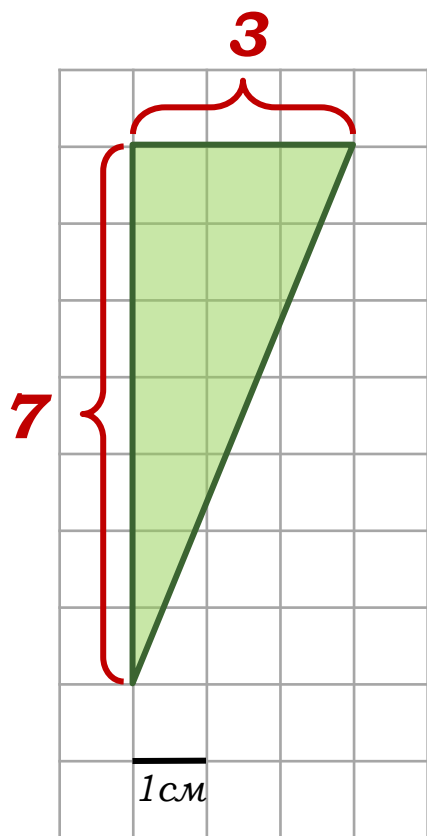
Тогда справедлива формула:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$



Задания открытого банка задач

1. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

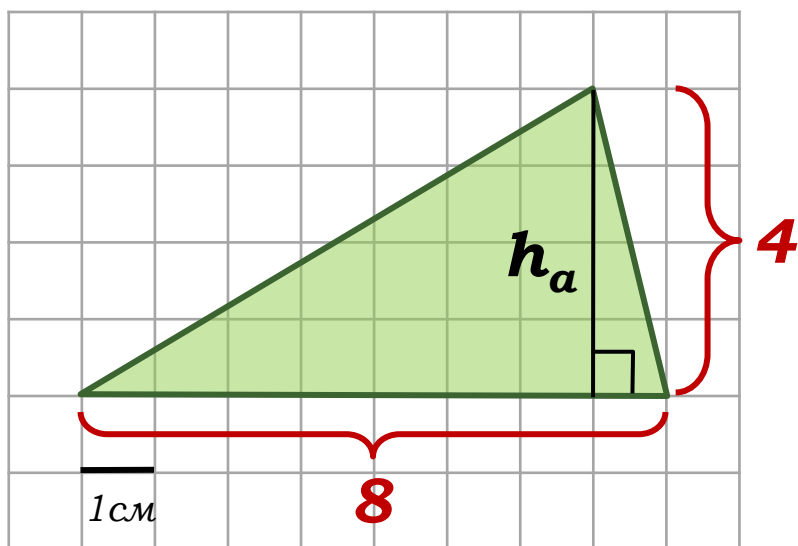
$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

Задания открытого банка задач

2. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

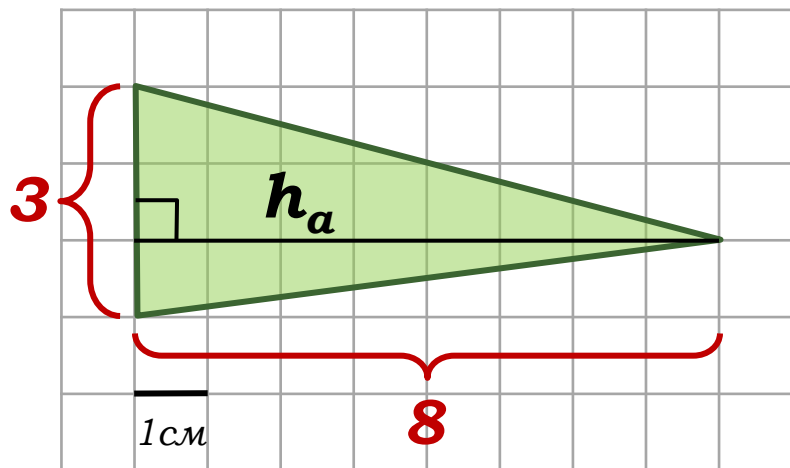
$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16 .$$

Ответ: 16.

Задания открытого банка задач

3. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

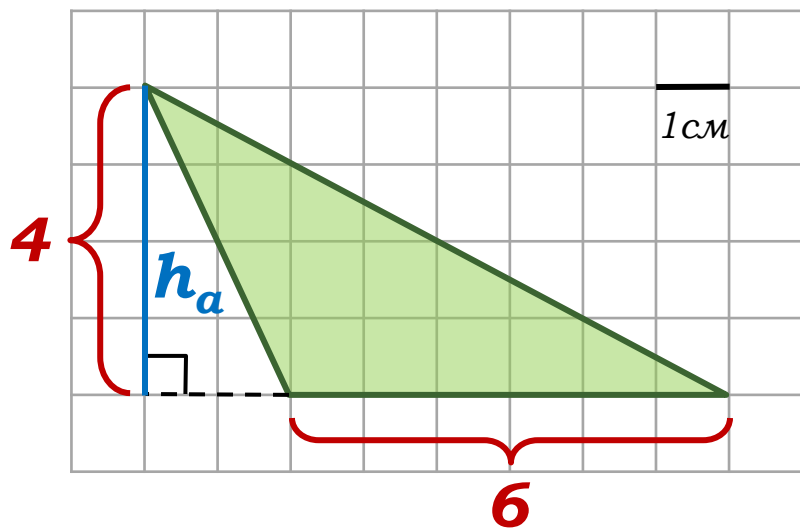
$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12 .$$

Ответ: 12.

Задания открытого банка задач

4. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

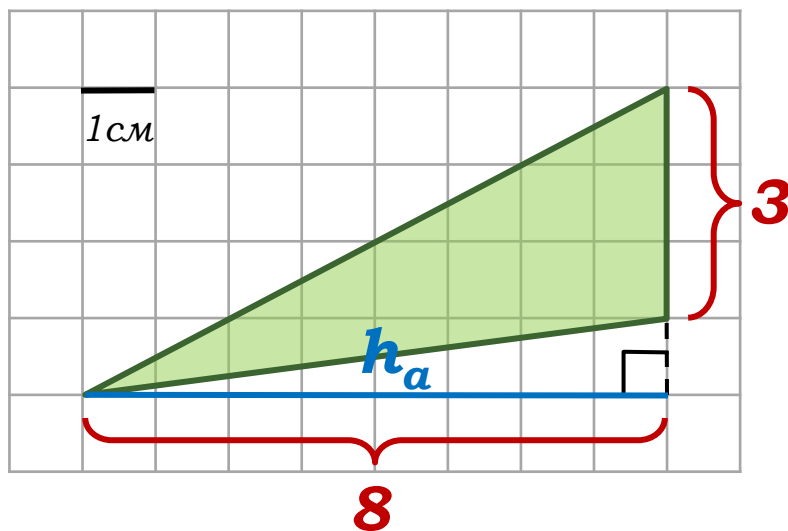
$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 .$$

Ответ: 12.

Задания открытого банка задач

5. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

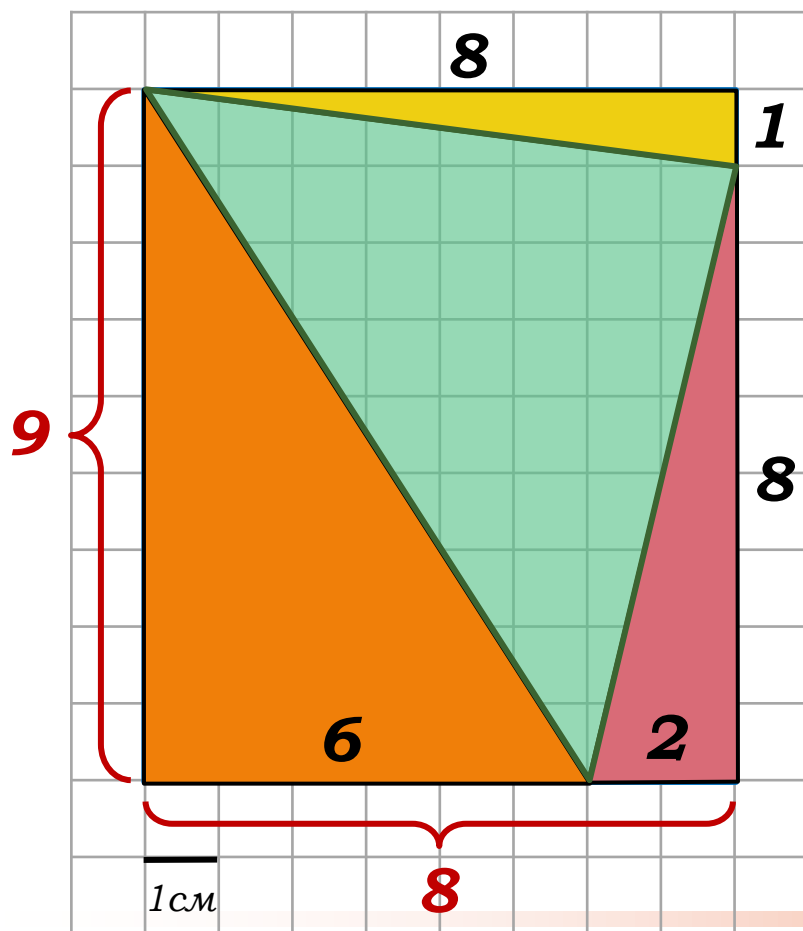
$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12 .$$

Ответ: 12.

Задания открытого банка задач

6. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S_{\Delta} = S_{n/y} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{\Delta_3}$$

$$S_{\Delta} = 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 =$$

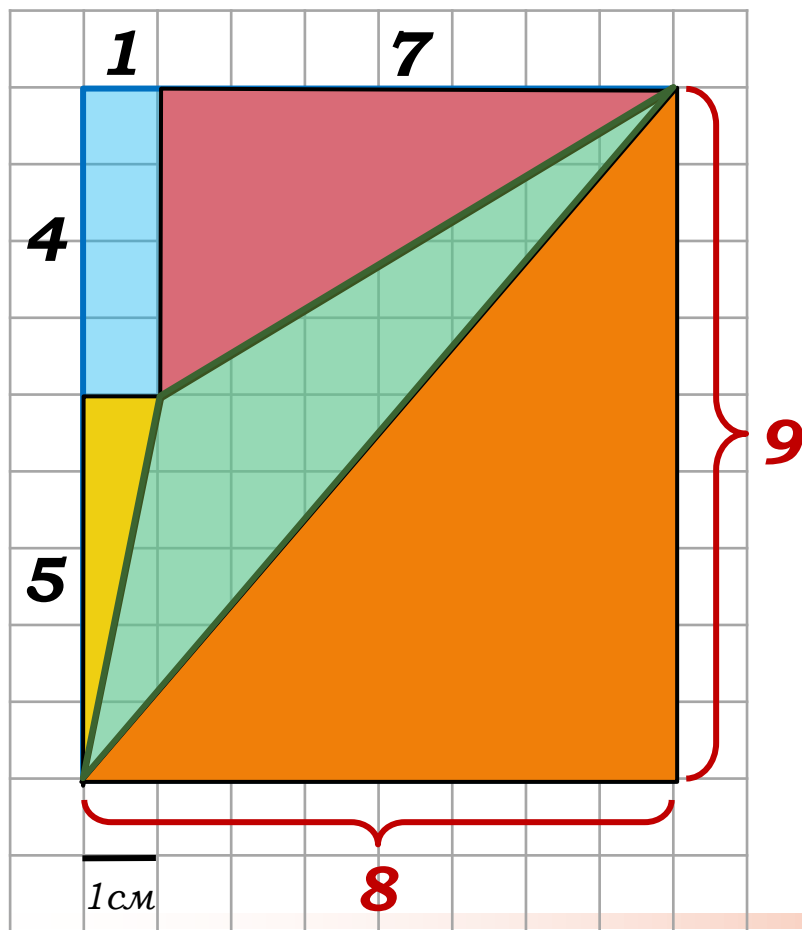
$$= 72 - 4 - 27 - 8 = 33 .$$

Ответ: 33.

Задания открытого банка задач

7. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S_{\Delta} = S_{n/y} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{\Delta_3} - S_{n/y_1}$$

$$S_{\Delta} = 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 -$$

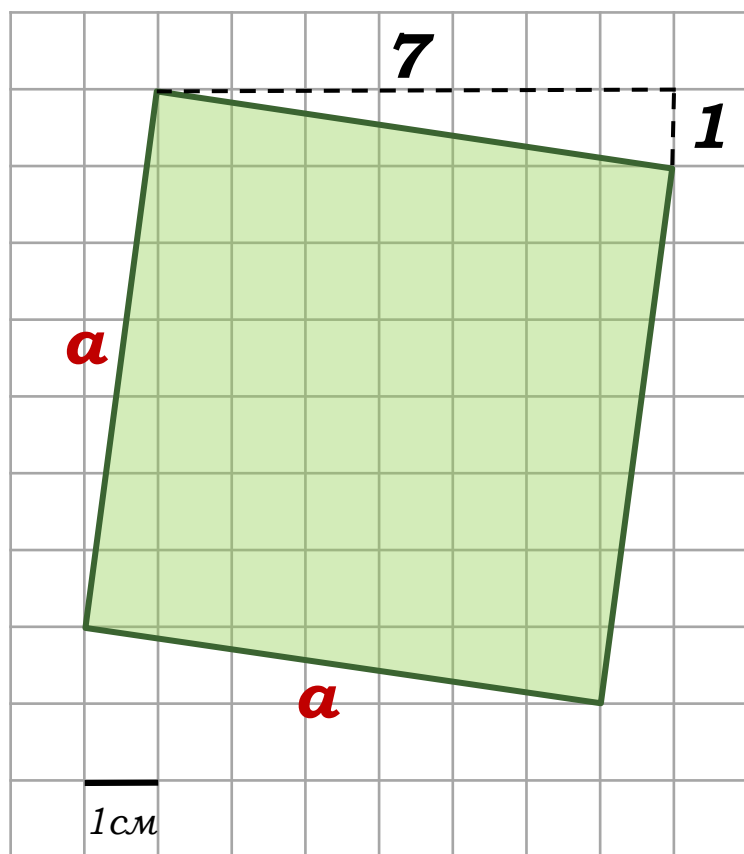
$$- \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 =$$

$$= 72 - 36 - 14 - 2,5 - 4 = 15,5.$$

Ответ: 15,5.

Задания открытого банка задач

8. Найдите площадь квадрата, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = a^2$$

по теореме Пифагора:

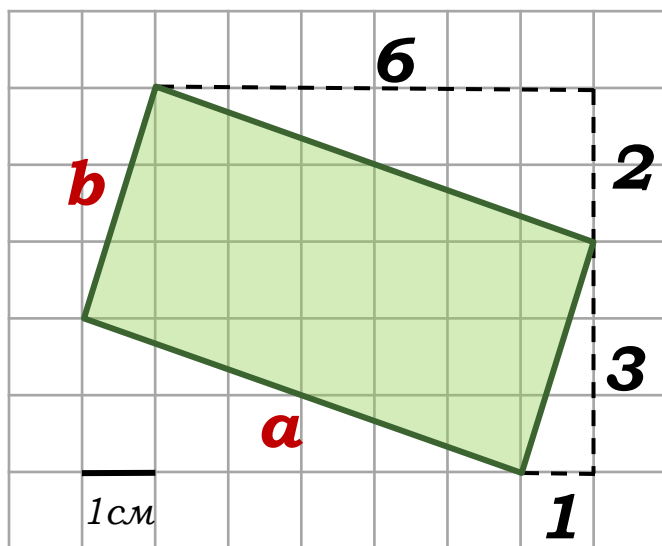
$$a^2 = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$$

$$S = 50$$

Ответ: 50.

Задания открытого банка задач

9. Найдите площадь прямоугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = ab$$

по теореме Пифагора:

$$a^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$$

$$a = \sqrt{40}$$

$$b^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

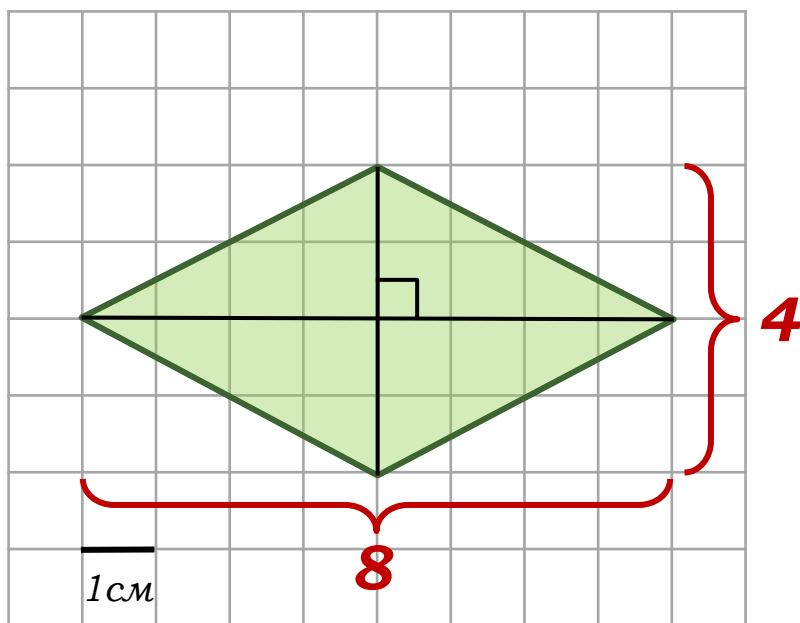
$$b = \sqrt{10}$$

$$S = \sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{400} = 20$$

Ответ: 20.

Задания открытого банка задач

10. Найдите площадь ромба, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

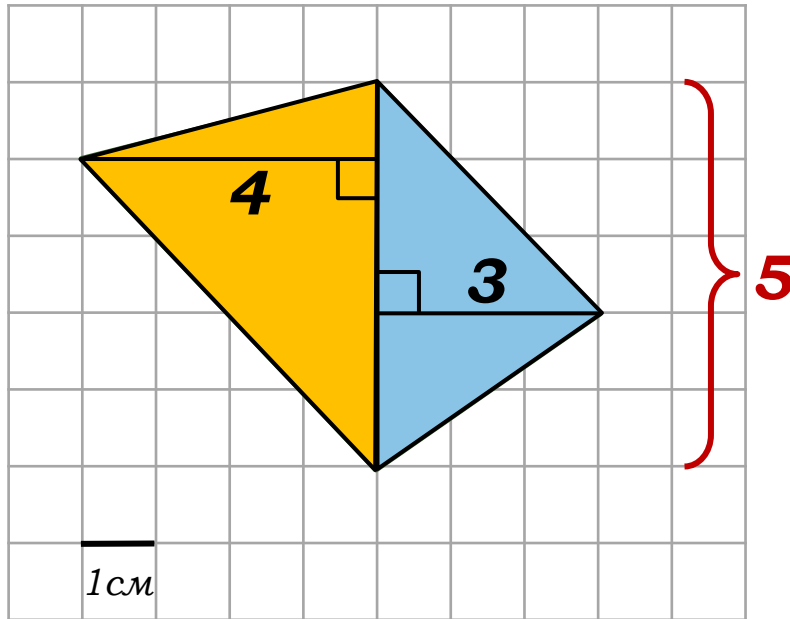
$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$$

Ответ: 16.

Задания открытого банка задач

11. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2$$

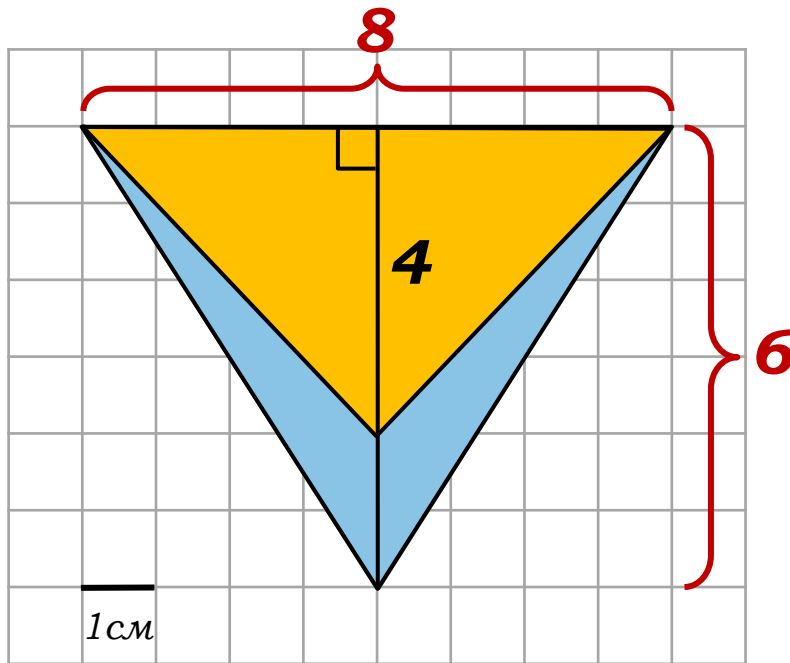
$$S = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (4 + 3) = \frac{35}{2} = 17,5$$

Ответ: 17,5.

Задания открытого банка задач

12. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_1 - \frac{1}{2}ah_2$$

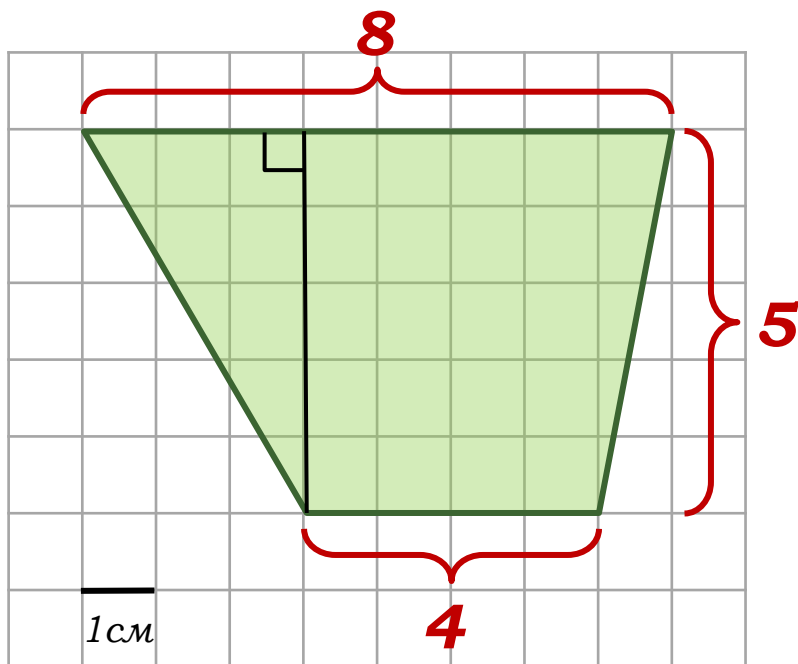
$$S = \frac{1}{2}a(h_1 - h_2)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (6 - 4) = 8$$

Ответ: 8.

Задания открытого банка задач

13. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

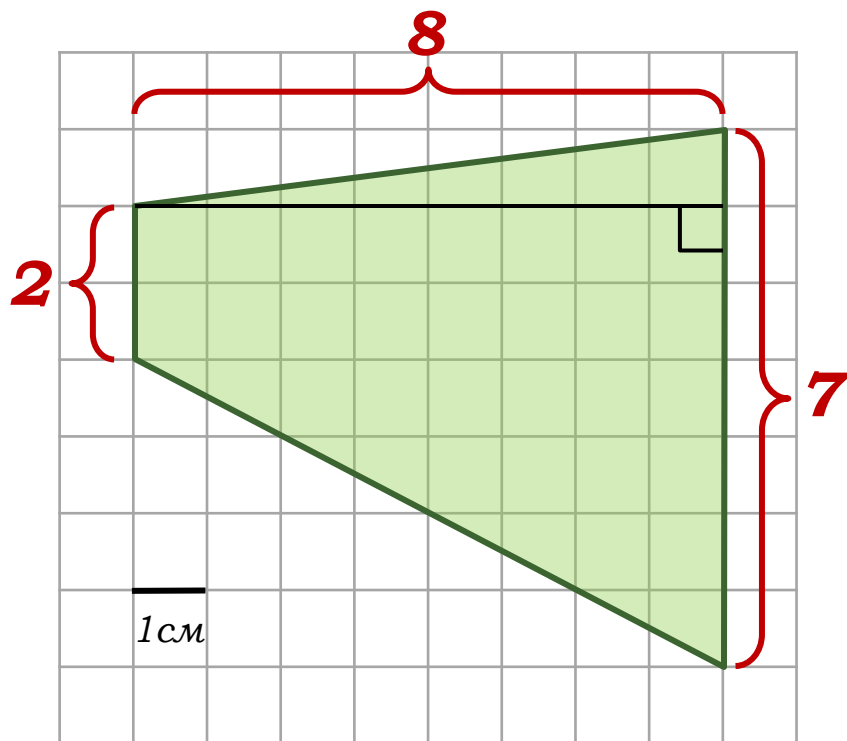
$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$S = \frac{8 + 4}{2} \cdot 5 = 30$$

Ответ: 30.

Задания открытого банка задач

14. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

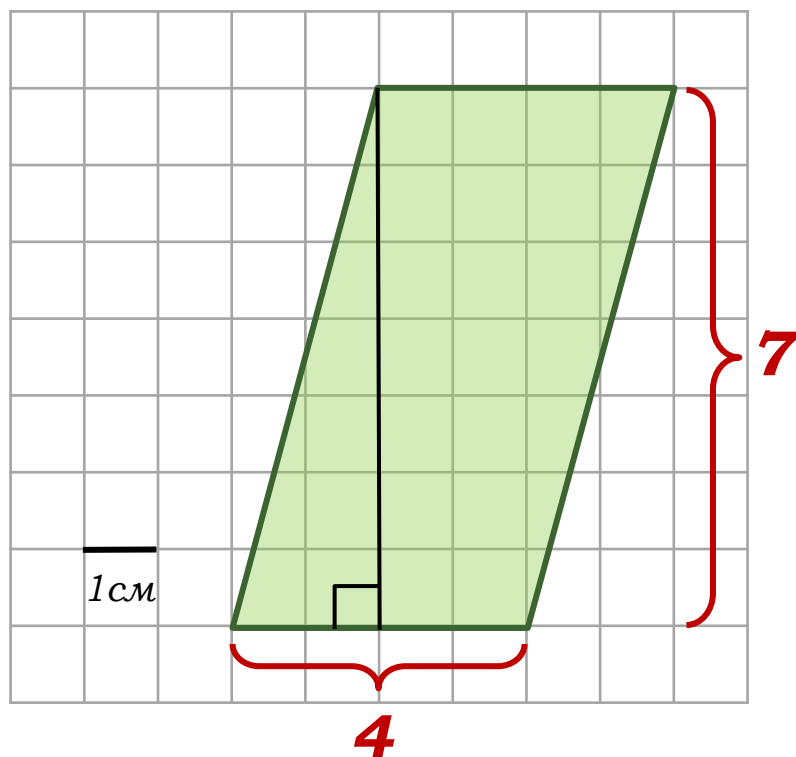
$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$S = \frac{7 + 2}{2} \cdot 8 = 36$$

Ответ: 36.

Задания открытого банка задач

15. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

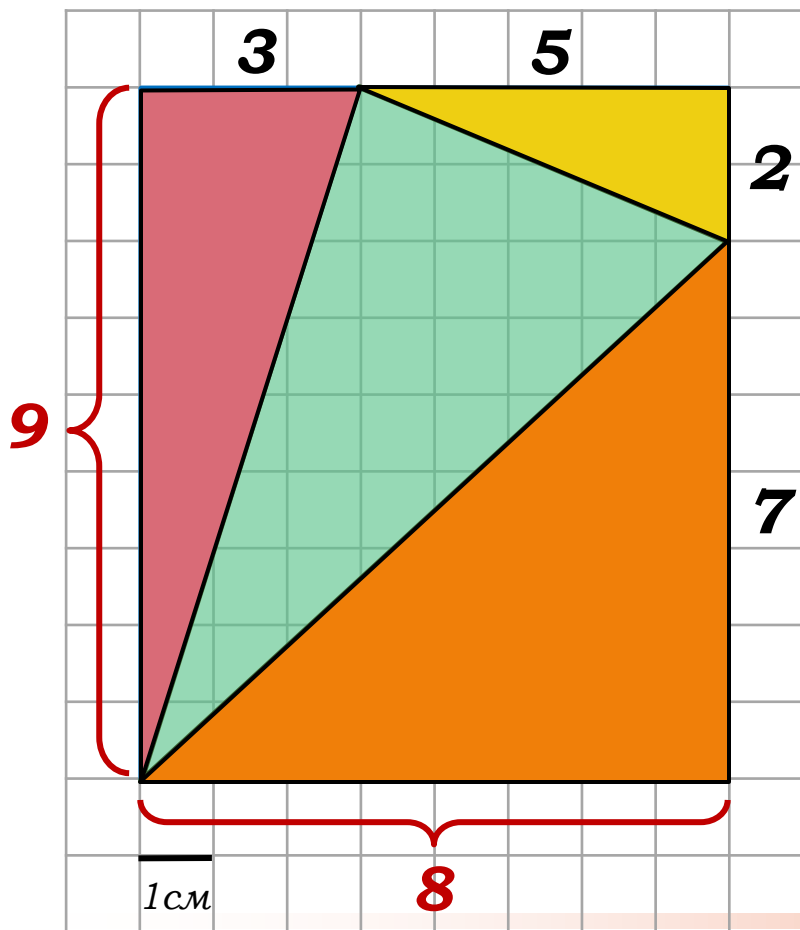
$$S = ah_a$$

$$S = 4 \cdot 7 = 28$$

Ответ: 28.

Задания открытого банка задач

17. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



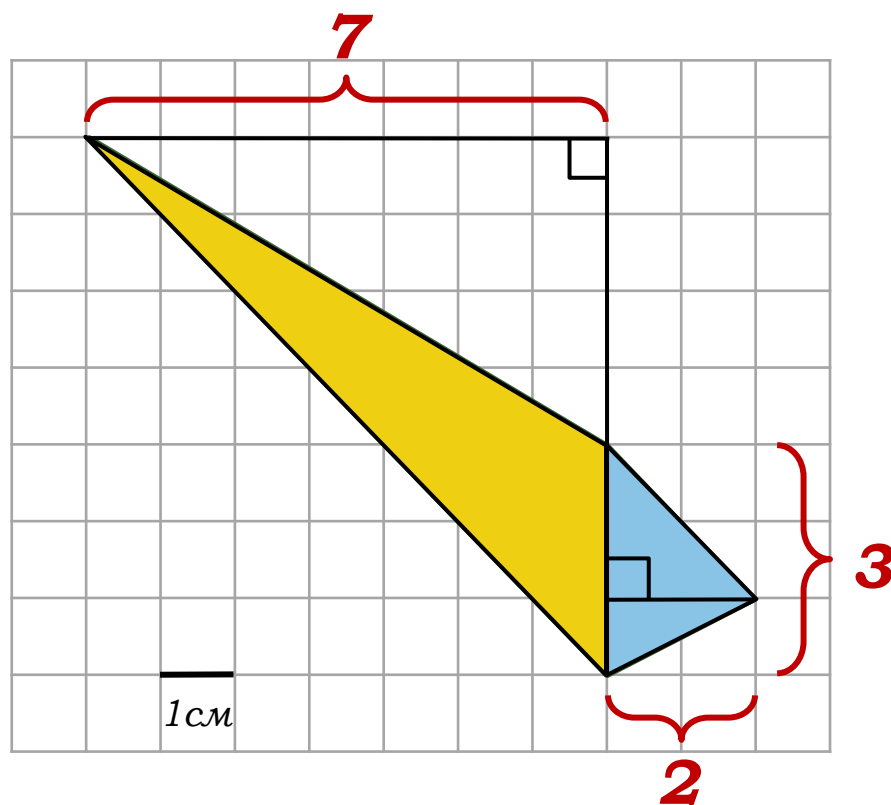
Решение:

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= S_{n/y} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{\Delta_3} \\ S_{\Delta} &= 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = \\ &= 72 - 13,5 - 28 - 5 = 25,5. \end{aligned}$$

Ответ: 25,5.

Задания открытого банка задач

18. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение: (1 способ)

$$S = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2$$

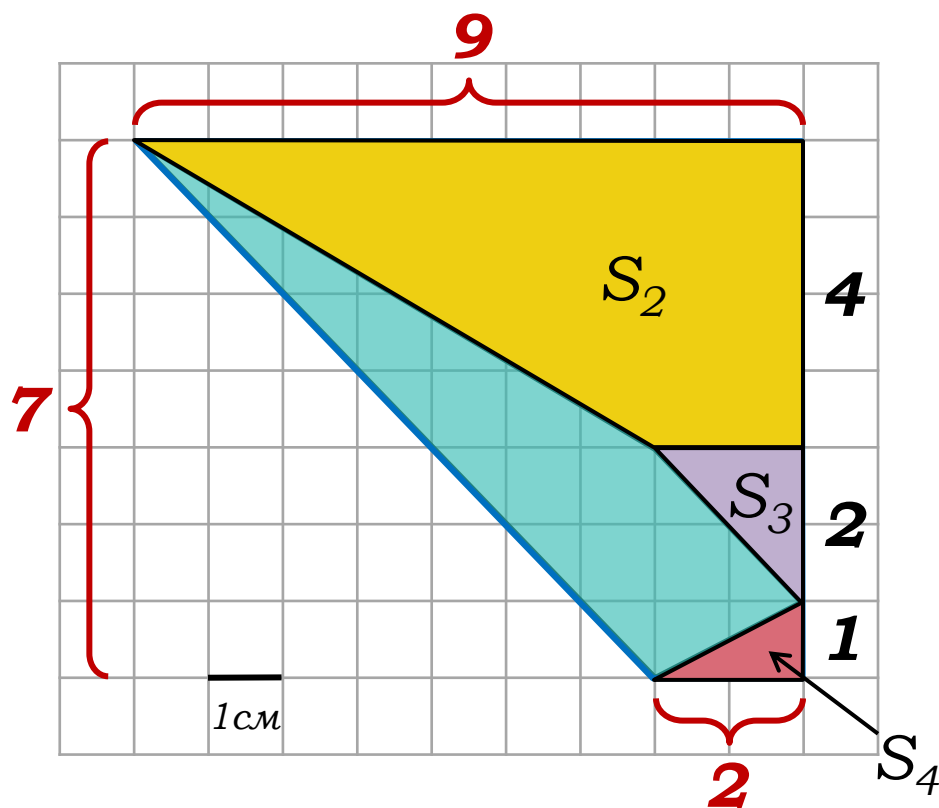
$$S = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (7 + 2) = \frac{27}{2} = 13,5$$

Ответ: 13,5.

Задания открытого банка задач

18. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение: (2 способ)

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$S_1 = \frac{9 + 2}{2} \cdot 7 = 38,5$$

$$S_2 = \frac{9 + 2}{2} \cdot 4 = 22$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

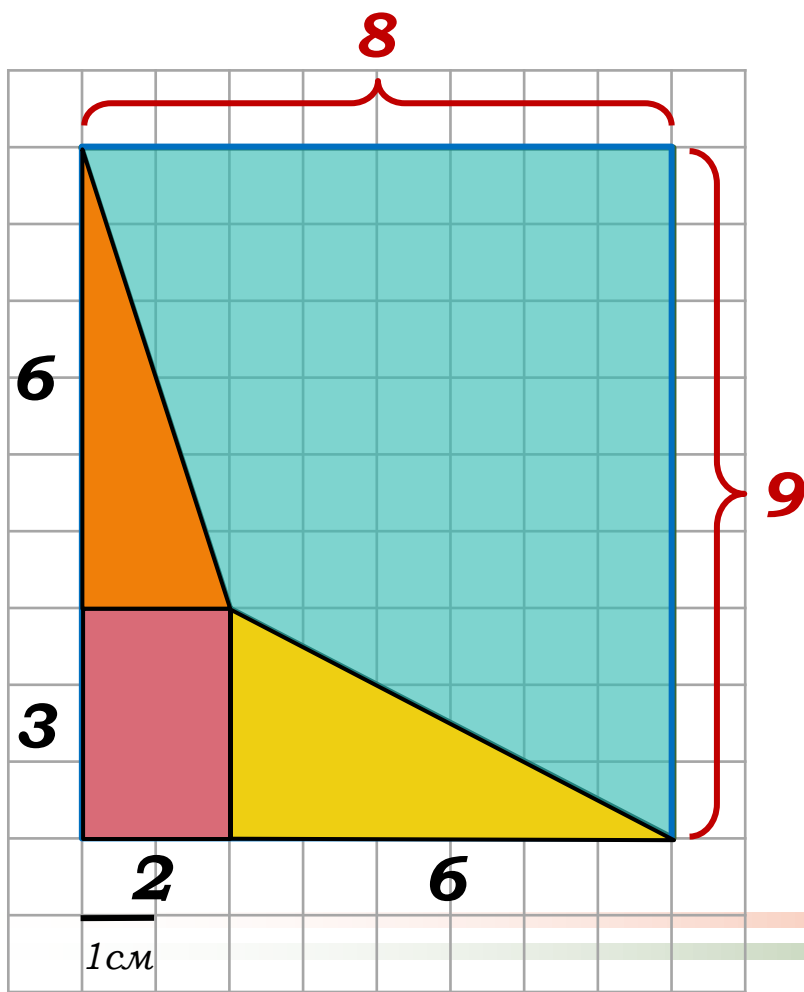
$$S = S_1 - S_2 - S_3 - S_4 = 38,5 - 22 - 2 - 1 = 13,5$$

Ответ: 13,5.

Задания открытого банка задач

19. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{n/y} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{n/y}$$

$$S = 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - 3 \cdot 2 =$$

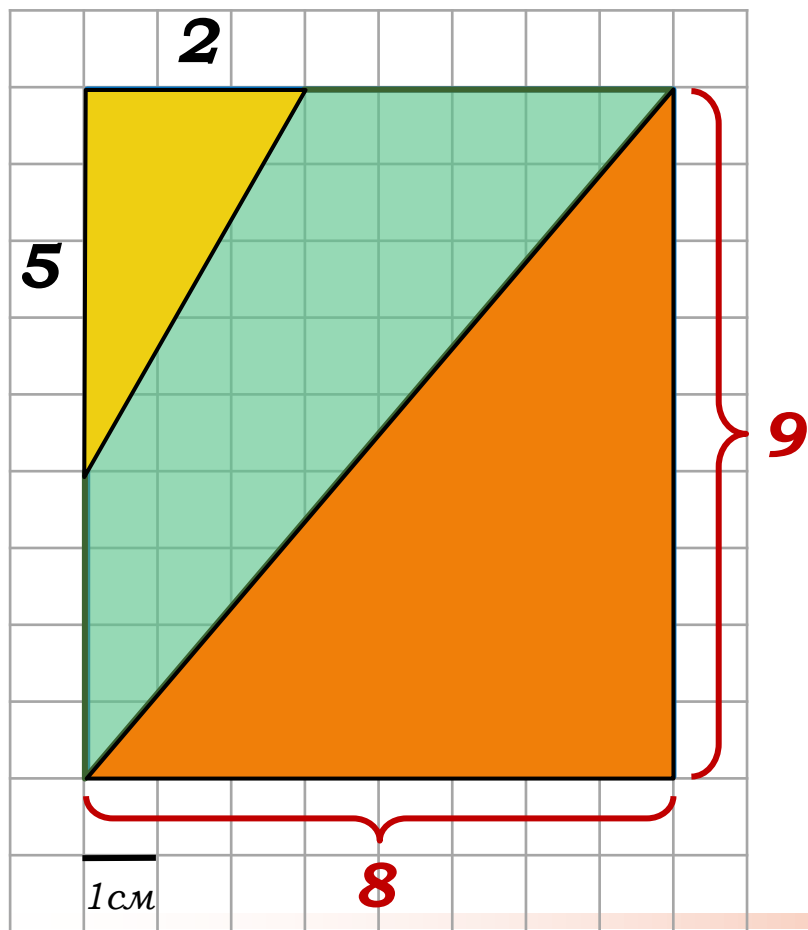
$$= 72 - 9 - 6 - 6 = 51 .$$

Ответ: 51.

Задания открытого банка задач

20. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{\text{н/у}} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2}$$

$$S = 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 =$$

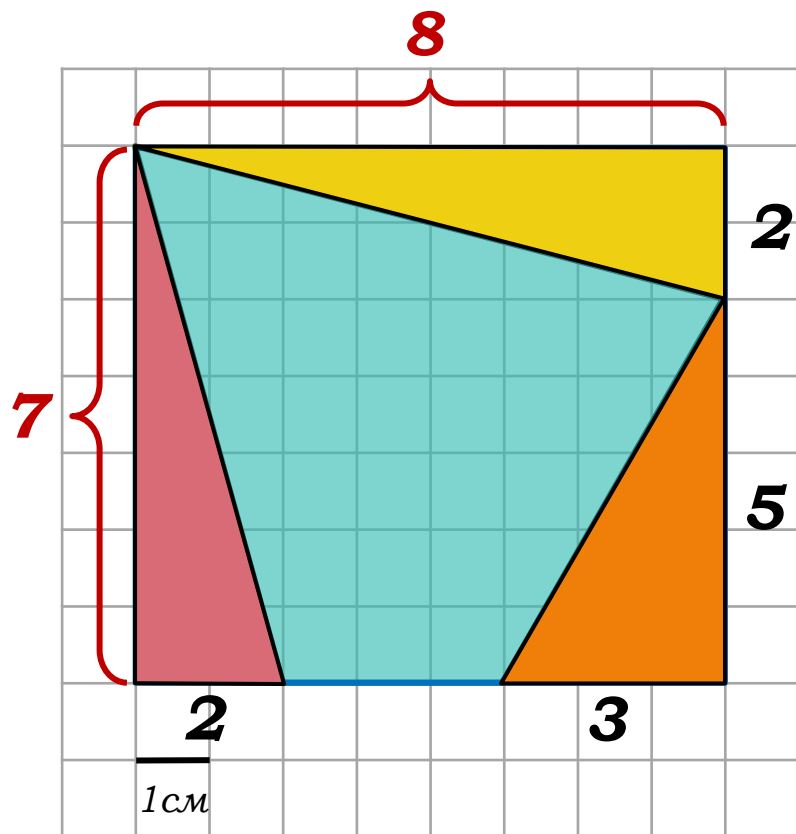
$$= 72 - 36 - 5 = 31 .$$

Ответ: 31.

Задания открытого банка задач

21. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{n/y} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{\Delta_3}$$

$$S = 8 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 =$$

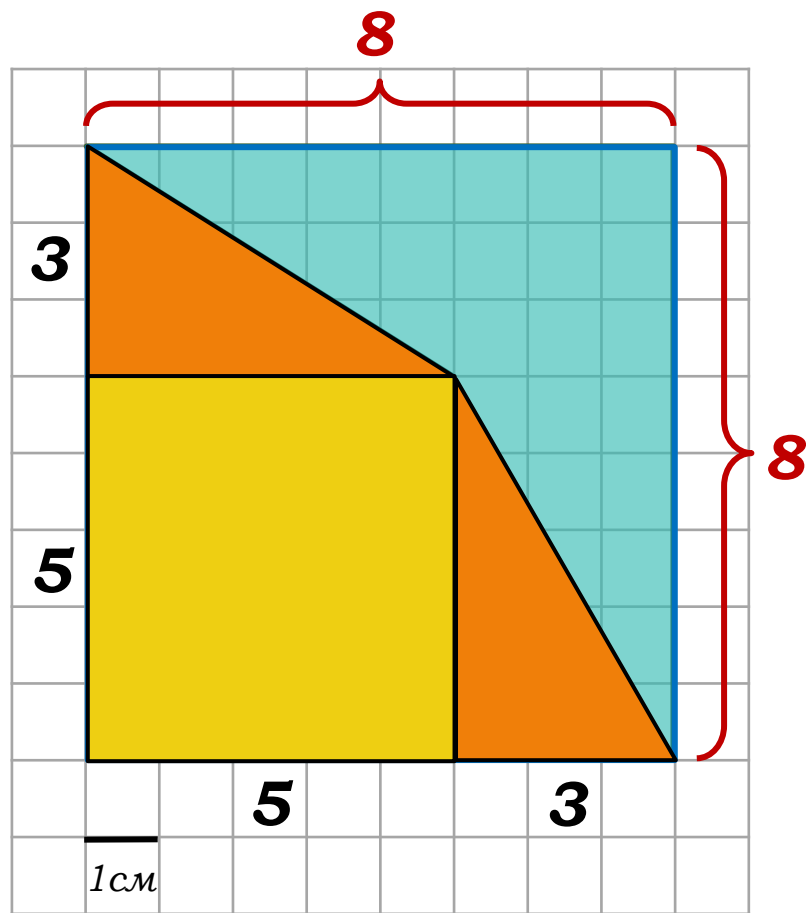
$$= 56 - 7,5 - 8 - 7 = 33,5.$$

Ответ: 33,5.

Задания открытого банка задач

22. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{\text{б. кв.}} - 2S_{\Delta} - S_{\text{м. кв.}}$$

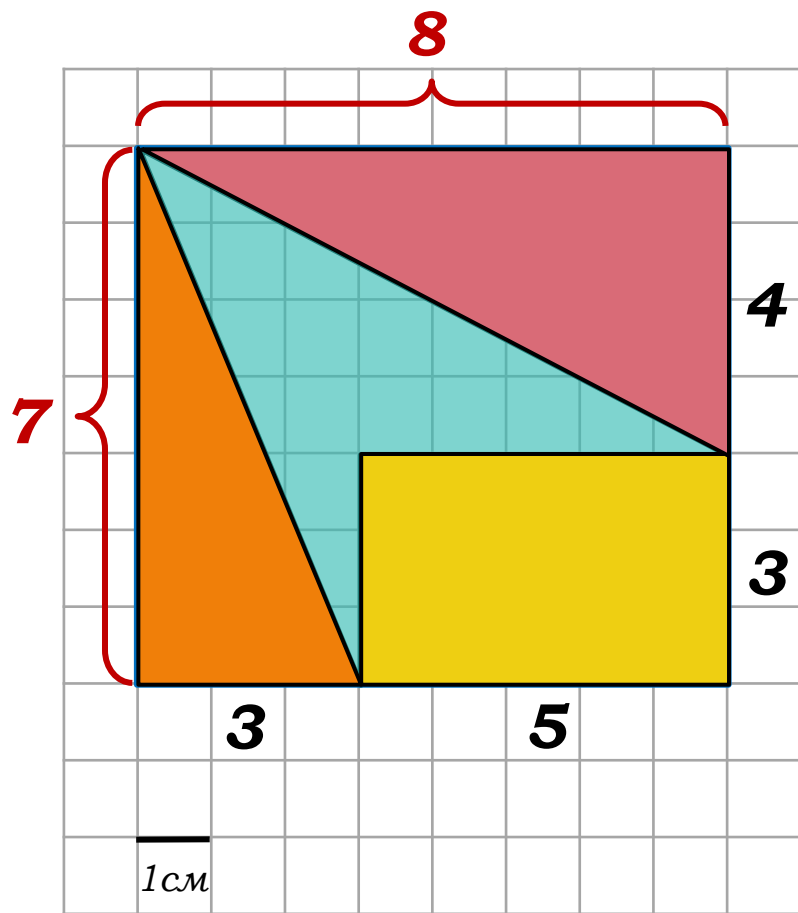
$$S = 8 \cdot 8 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 5 =$$
$$= 64 - 15 - 25 = 24 .$$

Ответ: 24.

Задания открытого банка задач

23. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{n/y} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{n/y}$$

$$S = 8 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 -$$

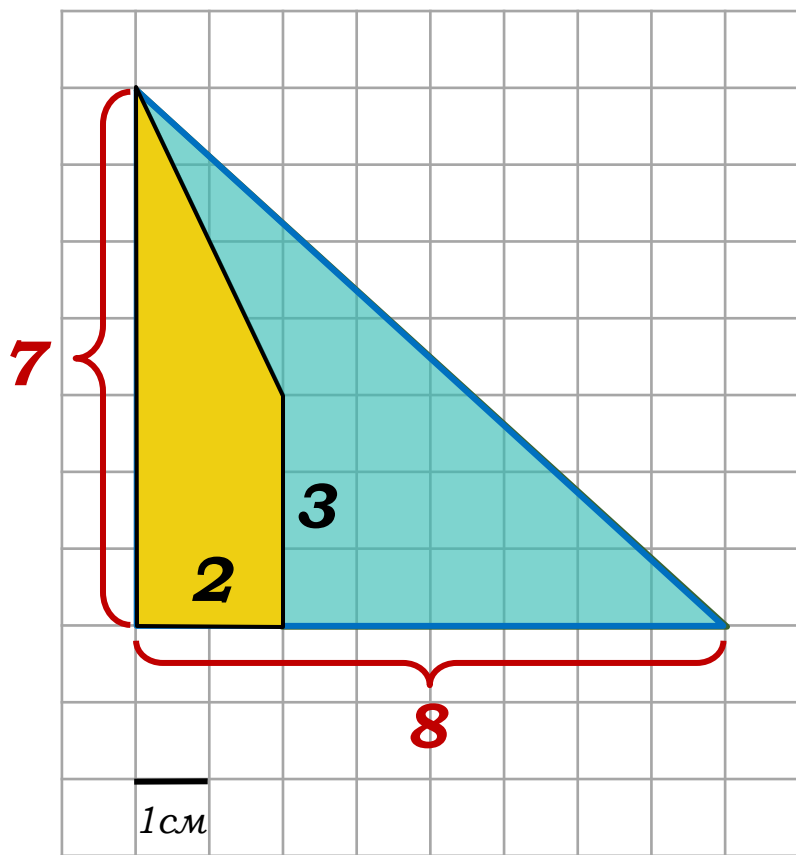
$$- \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 - 5 \cdot 3 =$$

$$= 56 - 10,5 - 16 - 15 = 14,5.$$

Ответ: 14,5.

Задания открытого банка задач

24. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение:

$$S = S_{\Delta} - S_{\text{трапеции}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 - \frac{3 + 7}{2} \cdot 2 =$$

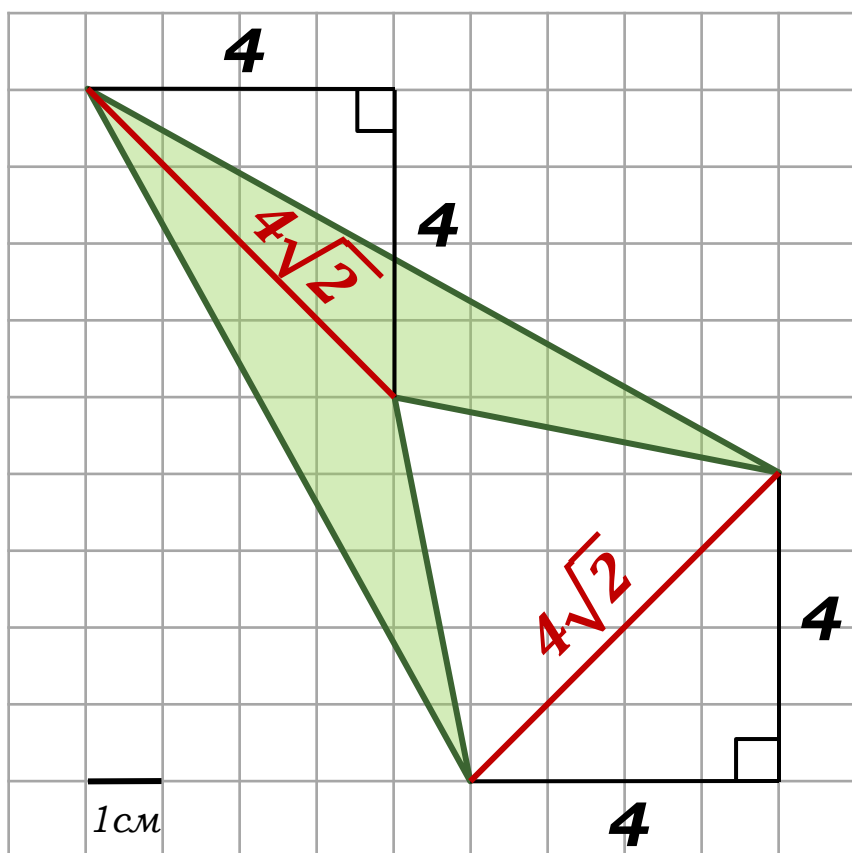
$$= 28 - 10 = 18 .$$

Ответ: 18.

Задания открытого банка задач

25. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение: (1 способ)

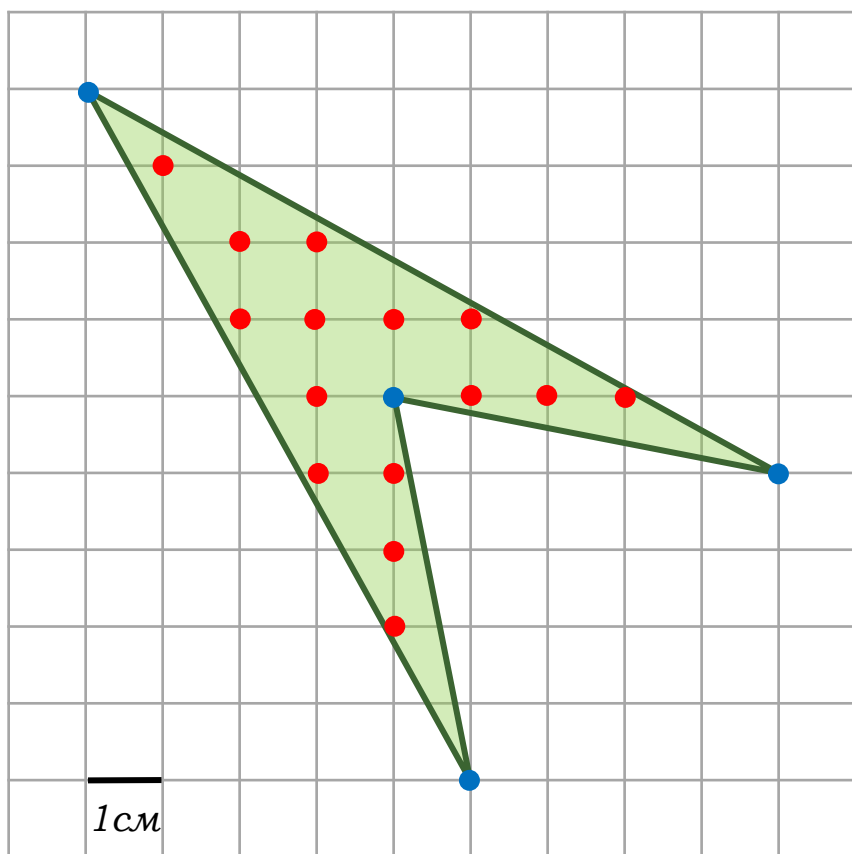
Площадь четырехугольника (в том числе невыпуклого) равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

Диагонали данного четырехугольника являются взаимно перпендикулярными диагоналями квадратов со стороной 4. Поэтому длины диагоналей равны $4\sqrt{2}$, а синус угла между ними равен 1. Тем самым, площадь данного четырехугольника равна 16.

Ответ: 16.

Задания открытого банка задач

25. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение: (2 способ)

$L = 15$ (красные точки),

$B = 4$ (синие точки),

тогда по теореме Пика

$$S = L + B/2 - 1$$

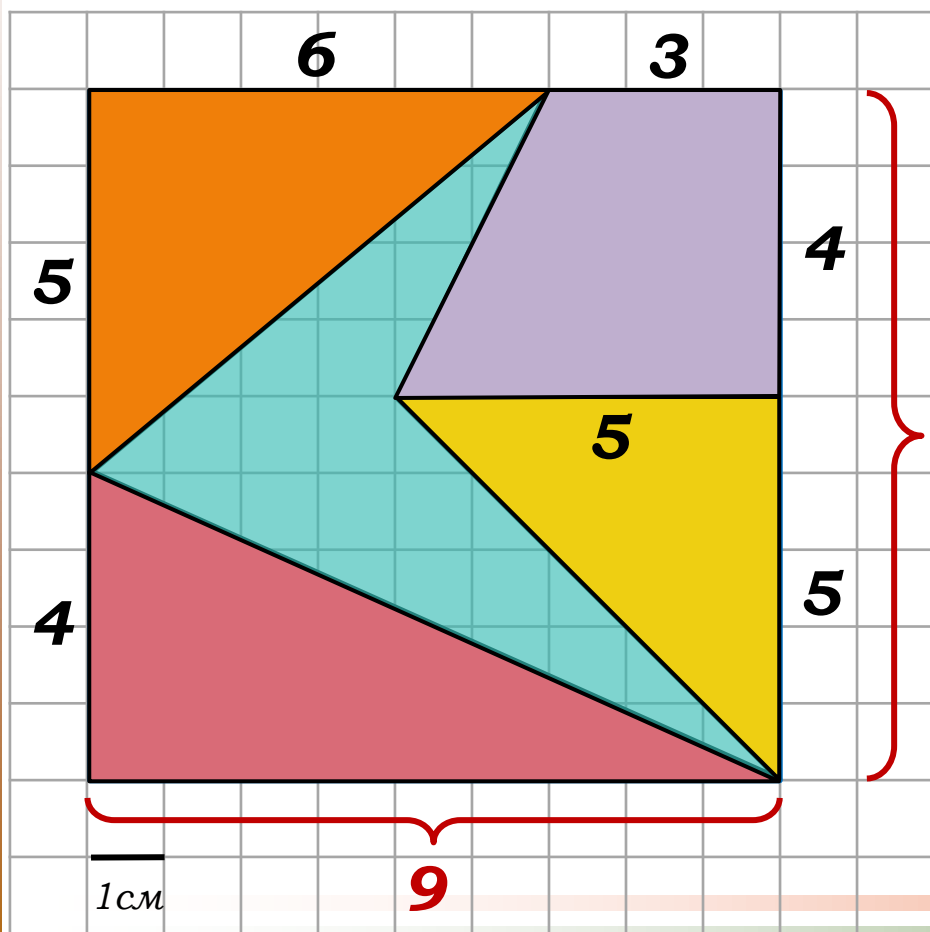
$$S = 15 + 4/2 - 1 = 16$$

Ответ: 16.

Задания открытого банка задач

26. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.

Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



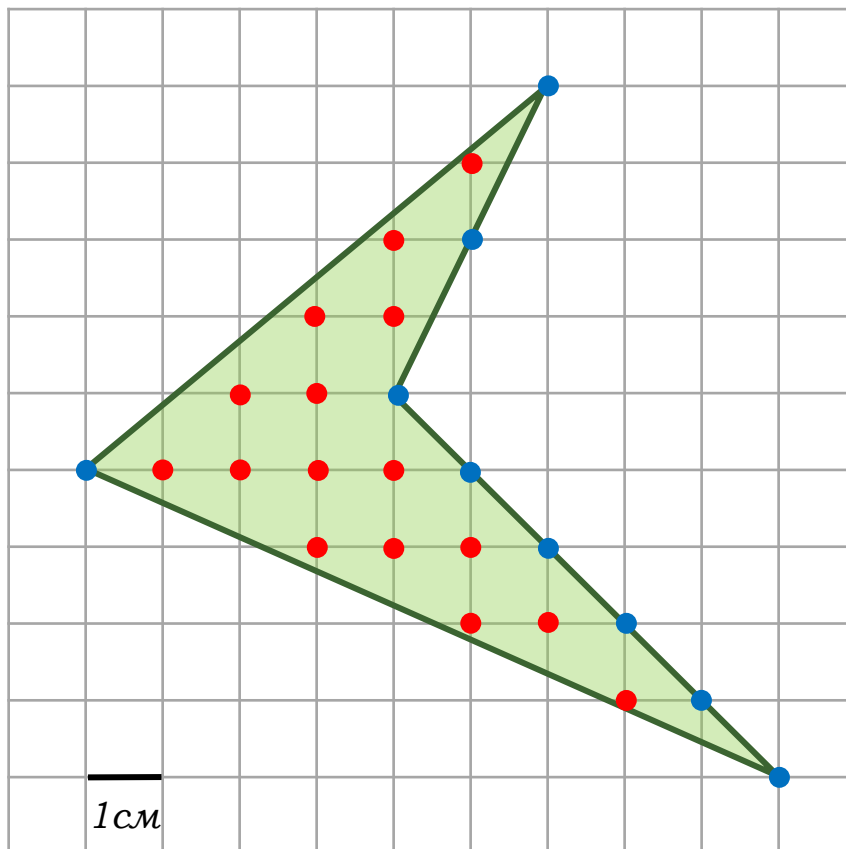
Решение: (1 способ)

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{кв.}} - S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} - S_{\Delta_3} - \\ &- S_{\text{трап}} . \\ S &= 9 \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 - \\ &- \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 - \frac{3+5}{2} \cdot 4 \\ &= 81 - 15 - 18 - 12,5 - 16 = 19,5 . \end{aligned}$$

Ответ: 19,5.

Задания открытого банка задач

26. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{см} \times 1\text{см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Решение: (2 способ)

$L = 16$ (красные точки),

$B = 9$ (синие точки),

тогда по теореме Пика

$$S = L + B/2 - 1$$

$$S = 16 + 9/2 - 1 = 19,5$$

Ответ: 19,5.